ROK V. ZESZYT 3 (9).

PORADNIK

W SPRAWACH NAUCZANIA I WYCHOWANIA ORAZ ADMINISTRACJI W SZKOŁACH OGÓLNOKSZTAŁCĄCYCH.

TREŚĆ:

ZAŁĄCZNIKI:

NAKŁADEM MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

WARSZAWA 1933.
SKŁAD GŁÓWNY: KSIĄŻNICA-ATLAS T. N. S. W. NOWY ŚWIAT 59.

UWAGI W SPRAWIE ORGANIZACJI NAUCZANIA MATEMATYKI W SZKOŁACH ŚREDNICH OGÓLNO-KSZTAŁCĄCYCH.

O NIEDOSTATECZNYCH WYNIKACH NAUCZANIA MATEMATYKI W SZKOŁACH.

Niezadowolenie z wyników nauczania matematyki w naszych gimnazjach stało się powszechne. Podzielają je zarówno profesorowie uczelni wyższych, jak władze szkolne, nauczycielstwo samo oraz wszyscy ci, którzy w jakikolwiek sposób stykają się na polu matematyki z uczniami naszych szkół średnich.

Przyczyny takiego stanu rzeczy są bardzo różnorodne. Niektóre z nich są ściśle związane z czynnikami natury społecznej i ekonomicznej, z przeszłemi i bieżącemi trudnościami organizacji naszego szkolnictwa,—byłoby bezcelowe mówienie o nich w tem miejscu.

Celowe natomiast jest mówienie o tem, co bezpośrednio od nauczycielstwa i dyrekcyj gimnazjów zależy, co wynika z ich koncepcyj dydaktycznych oraz ich stosunku do wykonywanej pracy. Wykrycie bowiem w tym zakresie niedociągnięć i błędów może przyczynić się do podniesienia poziomu nauczania.

Analizując tego rodzaju braki, dochodzi się do wniosku, że przyczyny ich można sprowadzić do ignorowania niezbyt licznych tez, które są tak elementarne i oczywiste, iż wygłasza się je nie bez uczucia zakłopotania. Gdyby jednak tezy te były zawsze w pamięci nauczyciela i gdyby zawsze miał on *wytrwałość w ich realizowaniu*, to praca jego stałaby na poziomie znacznie wyższym od tego, który przeciętnie spotykamy.

Celem przeto niniejszego szkicu jest raczej nawoływanie do realizacji pewnych tez, naogół prostych i znanych. Ponieważ

jednak byłoby trudne nawoływanie do czuwania nad tem, czego dokładnie się nie wymienia i nie precyzuje, więc zachodzi potrzeba omówienia całokształtu tych zasad, a między niemi i takich, które są niemal powszechnie wiadome.

O KONIECZNOŚCI WYTRWAŁEGO STOSOWANIA ZASAD DYDAKTYKI OGÓLNEJ.

Źródłem największej ilości braków, spostrzeganych w nauczaniu matematyki w naszych gimnazjach, jest niedocenianie wskazań dydaktyki ogólnej. Należy więc przedewszystkiem nawoływać nauczycielstwo *do rzetelnego opanowania jej zasad i do wytrwałości w ich stosowaniu.*

Jest to jednak tylko warunek konieczny dla naprawy istniejącego stanu rzeczy, ale nie wystarczający. Dalszym warunkiem jest dokładne uświadomienie sobie *celu nauczania oraz przyswojenie metod,* prowadzących do jego osiągnięcia.

Ustalenie tych celów jest zazwyczaj fundamentem, na którym wznosi się budowa programu. Decyduje ono zarazem o metodzie pracy. W dziejach matematyki od najdawniejszych czasów aż do spółczesnych przeplatają się dwie jej wielkie wartości: wartość praktyczna, dzięki której dźwiga się nasza kultura materjalna, i wartość rozumowa, kształtująca myśl naszą. Stąd i cel nauczania matematyki może być ujęty dwojako — może być nim: 1) kształcenie zdolności myślenia, 2) nagromadzenie pewnego zasobu wiadomości oraz wyrobienie pewnej sprawności technicznej. W ostatniem zdaniu wymieniliśmy te cele w porządku ich doniosłości z punktu widzenia dydaktyki spółczesnej, nie ulega jednak wątpliwości, że oba powinny występować łącznie na wszystkich stopniach szkoły ogólnokształcącej; tylko w uczelni wyższej lub w szkole zawodowej kurs matematyki może przybrać i przybiera inną treść, ściślej zastosowaną do potrzeb fachowych.

CELE NAUCZANIA FORMALNE I MATERJALNE.

Nieraz poruszano zagadnienie, który z dwóch celów — formalny, czy materjalny [1], jak je przyjęto nazywać, — powinien

[1] „Materjalny" w znaczeniu rzeczowej treści danej dyscypliny.

przeważać w szkole średniej ogólnokształcącej; przytem często z przesadą traktowano ich przeciwstawność, gdy w istocie rzeczy łączą się one ze sobą organicznie, wzajemnie się wspierają, a jeden od drugiego nie powinien być oddzielany. Wydobyć wartości kształcące pod względem formalnym można z bardzo różnorodnego materjału, — zależy to raczej od sposobu jego potraktowania. Z reguły, im materjał jest użyteczniejszy dla przyszłych zastosowań, dla budowy dalszych działów nauki, im metody są bardziej uniwersalne, — tem więcej są rozwijające. Czemuż więc przy nauczaniu nie mielibyśmy wybrać takiego materjału, który jest zarazem użyteczny pod względem materjalnym, a rozwijający pod względem formalnym? I czemu nie mielibyśmy wyzyskać tego materjału w obu kierunkach? Nie możemy coprawda uniknąć pewnej ilości (zresztą bardzo nieznacznej) szczegółów o mniejszej wartości formalnej, lecz o dużem znaczeniu praktycznem. Natomiast tylko w wyjątkowych wypadkach możemy sobie pozwolić na zbytek zajmowania czasu ćwiczeniami, obliczonemi jedynie na wygimnastykowanie myśli ucznia, a nie dającemi mu wiadomości, któreby były potrzebne bądź do dalszej nauki, bądź do życia praktycznego. Bez znacznego ryzyka możnaby to nazwać zbytkiem, gdyż zazwyczaj możnaby na miejsce podobnego materjału dobrać inny o większej użyteczności, a niemniejszych wartościach formalnych. Zespolenie obu celów jest jedną z cech stopnia doskonałości programów szkoły średniej ogólnokształcącej, a materjał nauczania w szkołach tego typu we wszystkich krajach kulturalnych historycznie tak się ułożył, że oba cele wspomniane ma na widoku. Uczymy arytmetyki, algebry oraz geometrji z trygonometrją zarówno poto, by uczeń mógł zastosować pewne wiadomości i algorytmy w przyszłej potrzebie praktycznej lub studjach technicznych, jak i dla przygotowania go do przyszłych studjów matematyki czystej; uczymy tych dyscyplin również i poto, aby go poprostu intelektualnie rozwinąć. W doborze więc materjału nauczania niema konfliktu pomiędzy celami formalnemi a materjalnemi [2], te zaś ostatnie każą trosz-

[2] Zresztą sam podział powyższy celów nauczania nie jest dokładny, a chcąc go przeprowadzić zupełnie konsekwentnie, dochodzimy do bardzo poważnych trudności. Utrzymujemy go tutaj, gdyż jest powszechnie przyjęty i daje dogodne zwroty mowy.

czyć się o to, by nabytą wiedzę *utrwalać i przeistaczać w umiejętności.*

Zobaczmy jednak, czy nie wypływa taki sam nakaz z celów formalnych. Gdybyśmy potrafili wyodrębnić formalny cel nauczania, i dążyć tylko do jego realizacji, to powstałoby przed nami pytanie, na czem właściwie mają być uprawiane owe wartości formalne: nie inaczej chyba, jak na pewnych *konkretach,* z któremi uczeń musi *dokładnie się zaznajomić i dłużej obcować,* jeżeli pożytek z tego kształcenia ma być trwały, — lecz w takim razie uporządkowany i w pewien sposób powiązany zbiór tych konkretów utworzy system wiedzy materjalnej ucznia, na której gruncie dopiero powstanie jego rozwój formalny. Odpowiadają temu ściśle i dzieje rozwoju nauki, w których toku narastanie kultury pojęciowej odbywało się na podstawie gromadzenia i systematyzowania *faktów naukowych.* W zakresie matematyki próby takiej systematyzacji sięgają wprawdzie bardzo głębokiej przeszłości, bo czasów E u k l i d e s a, wiemy jednak dobrze, że jego prace stały się możliwe tylko dzięki nagromadzeniu wiadomości matematycznych we wcześniejszych okresach rozwoju. Wzniesienie się bez tego zasobu wiadomości na wysoki poziom abstrakcji pojęciowej historycznie nie byłoby możliwe; w podobny sposób niemożliwe jest ono u ucznia bez rzetelnego zdobycia znacznego zasobu wiedzy faktycznej. Jakże więc tu myśleć o oddzieleniu celów formalnych od materjalnych?

Z drugiej strony, jeżeli wmyślimy się w tok nauczania bądź to matematyki, bądź jakiej innej nauki, to łatwo zauważymy, że z konieczności przeplatają się w nim dwa procesy: 1) doprowadzamy pewne rzeczy do świadomości ucznia, 2) zdobyte w ten sposób wiadomości utrwalamy w pewnym stopniu i w pewnym zakresie mechanizujemy — *przetwarzamy je w umiejętności* [3]). Tylko dzięki temu drugiemu procesowi możliwe jest wspinanie się ucznia z niższych szczebli na wyższe; gdybyśmy więc nie gonili nawet za wiedzą stosowaną, bądź to do życia praktycznego, bądź też do innych nauk, to już sam fakt, że chcemy poznawać coraz to wyższe działy danej wiedzy czystej, zmusiłby nas do utrwalania tych działów, które leżą niżej, i do pewnego zmechanizowania odnośnych wiadomości. Przykładów konieczności po-

[3]) Porówn. B. N a w r o c z y ń s k i. Zasady Nauczania.

dobnego mechanizowania w pewnym zakresie mamy bardzo wiele w innych rodzajach wiedzy oraz w sztuce: mechanizujemy przecież czytanie, pisanie, mechanizujemy żywy język obcy, gdy uczymy się go praktycznie (cóż moglibyśmy powiedzieć, gdybyśmy, mówiąc, musieli się zastanawiać nad regułami gramatyki i składni?); mechanizujemy gamy i wprawki przy nauce muzyki (cóż moglibyśmy zagrać inaczej?). W podobny sposób nauczyciel matematyki musi osiągnąć mechanizację wielu umiejętności, do których poprzez świadomość doprowadził ucznia. Czyż nie byłoby zupełną utopją sądzić, że można ucznia nauczyć matematyki, przechodząc od tematu do tematu w szeregu kolejnych pogadanek i ćwiczeń heurystycznych, obliczonych tylko na rozbudzenie jego inteligencji, bez gromadzenia w nim trwałej wiedzy i trwałych umiejętności? Niestety, podobne myśli błąkały się po naszej szkole ogólnokształcącej i wyrządziły niemało szkody. *Niedostateczne umacnianie we właściwym czasie zdobywanych przez ucznia wiadomości stało się niewątpliwie jedną z głównych przyczyn słabych wyników nauczania matematyki w naszych gimnazjach.*

Jakkolwiek więc za dominujący cel nauczania matematyki w szkole średniej ogólnokształcącej możemy istotnie uznać cel formalny, to zarówno sama pomyślność dalszego nauczania, jak i nakazy życia praktycznego zmuszają nas do liczenia się z równoległym celem materjalnym — w znaczeniu gromadzenia i utrwalania wiadomości.

Wysnujmy stąd wnioski.

ETAPY NAUCZANIA—UŚWIADOMIENIE I UTRWALENIE.

Skoro tylko zakładamy wspomniany powyżej cel pierwszy— formalnego kształcenia, to już nieodzownie musimy przyjąć, że przy nauczaniu matematyki do prawd jej i algorytmów musimy doprowadzić ucznia drogami oświetlonemi *pełną świadomością* i odpowiadającemi zasadzie jak największej *samodzielności* oraz *aktywności myślenia.* Gdyby nauczyciel trzymał się systemu szkolenia mechanicznego, bez dostatecznego wyjaśniania uczniowi dokonywanych czynności, to popełniałby największy grzech dydaktyczny, jaki być może.

Lecz z celu drugiego wynika dalej, że nauczyciel nie może ograniczyć się tylko do wyjaśnienia algorytmu, chociażby wielokrotnego, musi zaś *dążyć do utrwalania nabywanych przez ucznia wiadomości i przeistaczania ich w umiejętności*, tak, aby uczeń bez wysiłku posiłkował się niemi w razie potrzeby.

Konieczność zmechanizowania działań na liczbach całkowitych i ułamkowych, przekształcania wyrażeń algebraicznych, zestawiania i rozwiązywania równań, rachunku logarytmicznego i t. p. jest niewątpliwa, gdyż bez tego uczeń nie potrafi swobodnie posuwać się w dalszej nauce matematyki. W nauce geometrji potrzeba mechanizacji jest nieco mniejsza, lecz w pewnym zakresie też nieunikniona: podstawowe konstrukcje, twierdzenia, wzory na obliczanie pola i objętości i t. p. — muszą być z biegiem czasu (ale nie przedwcześnie) zmechanizowane. Tak samo przy nauczaniu trygonometrji bardzo prędko dochodzimy do konieczności utrwalenia pewnych wzorów, gdyż bez tego uczeń niebawem zupełnieby się zaplątał.

Z drugiej strony należy się wystrzegać mechanizacji niewłaściwej. Jest zagadnieniem bardzo subtelnem, co i w jakim zakresie należy mechanizować, a czego nie należy. Umiar i takt w tych rzeczach ze strony nauczyciela jest najlepszym probierzem jego inteligencji dydaktycznej, a przesada — jego największem niebezpieczeństwem. Jako przykład niewłaściwej mechanizacji, dosyć często spotykanej, możnaby przytoczyć takie podejście do reguł i schematów dyskusji, przy którem uczeń wpada w szablon i wykonywa go tak dalece bezmyślnie, że np. w wynikach, błędnie otrzymanych, nie spostrzega rażącej sprzeczności z samą treścią zadania. Niestety, jest to objaw bardzo pospolity.

Gdy zatem nauczyciel matematyki, robiąc co pewien czas rachunek sumienia, stawia sobie pytanie, czy dobrze uczy, to przedewszystkiem musi się zastanowić, czy dobrze przeprowadza uczniów przez oba wspomniane etapy: 1) uświadomienia, 2) utrwalenia i — w pewnym zakresie — zmechanizowania umiejętności. Przytem należy pamiętać, że osiągnięcie końca drugiego etapu bynajmniej nie jest dowodem rzetelnego przebycia pierwszego z nich, — a przecie *nauka myślenia odbywa się właśnie w etapie uświadomienia, na czem polega jego ogromna doniosłość.*

O BRAKU EGZEKUTYWY.

Szkoła dawniejsza grzeszyła przedewszystkiem tem, że nie doceniano w niej formalnych wartości matematyki i mechanizowano cały szereg reguł bez genetycznego ich przygotowania, często nawet bez dostatecznego ich wytłumaczenia. Być może, że ten stary grzech pokutuje jeszcze i obecnie w niejednej szkole; należałoby z nim raz skończyć. Naogół jednak, wskutek reakcji przeciwko nierozumnej mechanizacji, daje się obecnie zauważyć inne niebezpieczeństwo: wielu nauczycieli popadło w przeciwną przesadę, ześrodkowali oni całą swą uwagę na formalnych wartościach nauczania, zapominając o wartościach materjalnych i w niewłaściwy sposób przeciwstawiając jedne drugim, jakgdyby nie było oczywiste, że *tylko harmonijne uwzględnienie wartości formalnych i materjalnych może zapewnić uczniowi rzetelny rozwój matematyczny.* Powstał specjalny typ nauczyciela, którego lekcje są nieraz misternym wzorem heurezy, z uwzględnieniem finezyj teoretycznych, ale którego uczniowie bardzo mało umieją, gdyż nauczyciel nie liczy się z tem, że nie wystarcza doprowadzenie ucznia do uświadomienia pewnych rzeczy, że jest to tylko pierwszy z dwóch etapów w nauczaniu. Taki nauczyciel często wiele wymaga od samego siebie, ale nie umie wymagać od ucznia, — możnaby to nazwać krótko *brakiem egzekutywy*. Otóż, jeżeli jeszcze niezbyt dawno szkoła grzeszyła nierozumną mechanizacją, to dziś grzeszy przedewszystkiem brakiem egzekutywy.

W związku z tem odrazu należy stwierdzić, że najlepszym probierzem wartości pracy nauczyciela są osiągane przez niego wyniki w postaci inteligencji matematycznej jego uczniów, ich wiedzy faktycznej i zamiłowania do przedmiotu. Efektowność lekcyj, pokazywanych władzom szkolnym, nie odgrywa tu istotnej roli, jakkolwiek może świadczyć o artyzmie nauczyciela. Praktyka codzienna, a nie występ świąteczny decyduje o wartości pracy w szkole.

O METODZIE NAUCZANIA.

Z tezą o podwójnym celu nauczania matematyki łączy się bezpośrednio zagadnienie metody nauczania. Skoro przywiązujemy tak wielką wagę do celu formalnego kształcenia, to musimy

uznać, że forma heurystyczna jest niezmiernie cenna, zapewnia bowiem twórczy udział uczniów w zdobywaniu wiedzy i nie narzuca im szczegółów w gotowej formie *). Uważając metodę heurystyczną za pożądaną podstawową formę pracy, należy wszakże przyznać, iż nie wszystkie rozdziały i paragrafy kursu mogą być w tej formie podane, zwłaszcza, jeżeli zestawimy ilość materjału nakazanego przez program z ilością czasu, którym rozporządzamy. Niepodobna ustalić, jaką metodą różne działy mają być przerabiane. Decyduje o tem nauczyciel. Które działy potraktuje heurystycznie, które zaś poda w inny, mniej genetyczny sposób, — to jego rzecz. Z reguły heureza powinna zajmować poważne miejsce, a odsetek wiadomości podanych uczniowi w mniej lub więcej gotowej formie nie powinien być znaczny. Metoda powinna być silnie oparta na aktywności ucznia — od tego postulatu zasadniczego nie należy odstępować. W klasach wyższych należy przyzwyczajać uczniów do coraz to dłuższych wypowiadań się samodzielnych i do samodzielnego opanowania coraz to większych fragmentów kursu.

O ZAINTERESOWANIU UCZNIA.

Nauczyciel powinien przedewszystkiem troszczyć się o to, aby nauka zawierała *jak największą ilość momentów ciekawych dla ucznia i pociągających go do pracy*. Ten dezyderat jest jednym z najważniejszych, a w sprawie jego realizacji jest bardzo wiele do zrobienia. To, co zrobiono dotąd, nie jest zadowalające. Niestety, trudno pouczyć, jak nauczyciel ma stwarzać te momenty emocjonujące ucznia, — zależy to raczej od talentu nauczyciela, od jego umiejętności nawiązywania kontaktu z klasą. Bądź co bądź, *zasada poglądowości w nauczaniu*, przechodzenia od konkretnych przykładów do uogólnień, a nie odwrotnie, powinny być jak najszerzej uwzględniane, — zwłaszcza w klasach niższych i średnich. Staje się ona coraz mniej obowiązująca przy zbliżaniu się ku końcowi kursu. Niestety, te postulaty są naogół mało uwzględniane nietylko w klasach średnich, ale nawet i w gimnazjum niższem. Istnieje literatura, w języku polskim dosyć zresztą uboga, która może być w tem pomocna, dając materjał przyczyniający się do ożywienia kursu [4]). Istnieją oprócz literatury różne pomoce szkolne. W tych wypadkach, gdy samą swą treścią matematyka nie pociąga dostatecznie młodzieży, apelujmy do jej woli opanowania przedmiotu, wskazując jego niezbędność w zakresie zastosowań do nauk ścisłych i techniki spółczesnej. Często zamiłowanie do matematyki rozwija się stopniowo pod wpływem tego rodzaju pobudek ubocznych [5]). Nauczyciel powinien uruchomić wszystko, czem rozporządza sam oraz co posiada szkoła, aby uczynić swój przedmiot jak najbardziej pociągającym, oraz powinien rozbudzić zdrową ambicję uczniów [6]) w pokonywaniu trudności.

*) Heurezę rozumiemy tu w najogólniejszem znaczeniu, jako metodę naprowadzającą. (Porówn. w tej sprawie dopisek w końcu artykułu).

O PRACY DOMOWEJ UCZNIA.

Uczeń, nawet i zdolny, nie może rzetelnie opanować kursu matematyki szkoły średniej, nie pracując poza lekcjami. Pewna ilość pracy domowej jest obowiązująca. Powinna to być przedewszystkiem praca nad utrwaleniem tego, co zostało w klasie przygotowane przez doprowadzenie ucznia do pewnych wiadomości i zupełnie jasnego ich uświadomienia. Nauczyciel musi wyznaczać pracę do domu i sprawdzać, czy została wykonana i czy zeszyty domowe są utrzymane porządnie. Technika tego sprawdzania może posiadać rozmaite formy, zawsze jednak stanowi bardzo ważny szczegół lekcji. Oczywiście, nie można wymagać od nauczyciela piśmiennego poprawiania wszystkich wypracowań domowych. Zdawałoby się, że śmiesznie jest o tem mówić, a jednak przebłyski podobnej tendencji pojawiły się u nas w związku z modą na t. zw. plan daltoński. Nauczyciel zmieniał

[4]) *„Lilâvati"* oraz *„Śladami Pitagorasa"* S. Jeleńskiego, *„Nauczanie początków matematyki"* Laisant'a w tłum. Czubalskiego, *„Parametr"* i *„Młody matematyk"*, czasopismo pod red. A. M. Rusieckiego.

[5]) Stwarza to przed nauczycielem wdzięczne zadanie wskazywania uczniowi roli matematyki w całokształcie wiedzy. Omawiając to zagadnienie z punktu widzenia „hierarchji nauk", nauczyciel będzie miał okazję do uprzytomnienia uczniowi, iż cała wiedza nasza o świecie zewnętrznym jest ścisła w tym tylko stopniu, w jakim może posługiwać się matematyką. Niemniej wdzięcznym tematem jest omawianie dziejowej roli matematyki w poznaniu świata zewnętrznego i jego opanowaniu przez poznanie.

[6]) Samo zaciekawienie nie wystarczy — nie może być ono stanem stałym, jest to raczej szereg kolejnych pobudek, działających na wolę do pokonywania trudności. Ambicja będzie tu sojusznikiem.

się przytem w człowieka skazanego na ciężkie roboty, lub w najlepszym wypadku w męczennika idei, pożytek zaś z tej pracy był bardzo wątpliwy.

Ze znanych a zalecanych form kontroli pracy domowej można wymienić następujące: obchodzenie klasy w początku lub w końcu lekcji i zaglądanie do zeszytów domowych; wymaganie, aby każdy uczeń, wychodząc do tablicy, brał ze sobą zeszyt domowy w celu okazania go nauczycielowi; zabieranie od czasu do czasu zeszytów domowych grupami dla dokładniejszej kontroli. Oczywiście, jeżeli nauczyciel zastosuje naraz kilka takich sposobów, kontrola stanie się pewniejsza. Wreszcie, można ją uwieńczyć zarządzaniem od czasu do czasu generalnej rewizji wszystkich zeszytów i notowaniem krótkich charakterystyk z dokonanego przeglądu. Życie w szkole powinno być tak zorganizowane, aby uczniowie klas niższych nie mieli ani czasu, ani miejsca na odpisywanie ćwiczeń domowych, dokonanych przez kolegów, natomiast — żeby w klasach wyższych taka kontrola stała się niepotrzebna ze względu na atmosferę moralną klasy i stosunek pomiędzy uczniami a nauczycielem. Takie wdrożenie ucznia do samodzielnej i systematycznej pracy ma ogromne znaczenie nietylko dla jego rozwoju intelektualnego, ale też i dla rozwoju charakteru.

Te myśli przewodnie: 1) silne podkreślanie dwoistości celu nauczania matematyki, 2) uwzględnianie momentu uświadomienia i momentu utrwalenia, 3) dostateczna egzekutywa. 4) odpowiednio dobrana metoda, a więc umiarkowana i rozumna heureza, 5) ciągłe odwoływanie się do zainteresowania ucznia oraz do jego ambicji i troska o nawiązanie kontaktu wewnętrznego z klasą, 6) dobrze zorganizowana praca domowa, — tworzą podstawę, na której powinno się opierać nauczanie matematyki w szkole średniej.

To jednak nie wszystko: jest cały szereg szczegółów natury pozornie drugorzędnej, z których składa się całokształt pracy dokonywanej w szkole, a które przez to nabierają znacznej wagi, gdyż dobra całość może być złożona tylko z dobrych szczegółów.

Rozpatrzmy je pokolei.

O POMOCACH W NAUCZANIU.

Rola podręcznika, notatek i pomocy szkolnych jest sprawą bardzo subtelną i ważną. Wiemy dobrze, że wprawny nauczyciel rzadko uczy ściśle podług podręcznika, gdyż odbiłoby się to ujemnie na zainteresowaniu uczniów lekcjami w klasie. W dodatku, istniejące podręczniki tylko w wyjątkowych wypadkach odzwierciedlają heurystyczną formę nauczania, i nawet można kwestjonować, czy taka forma podręcznika wogóle byłaby właściwa. Ponieważ jednak tę formę nauczania uznajemy za podstawową, przeto nauczyciel właściwie zmuszony jest do ciągłego przebudowywania toku nauczania, podanego w podręczniku, na formę heurystyczną. Zachodzi więc zawsze mniej lub więcej poważna różnica pomiędzy tem, co uczeń słyszy w szkole, a tem, co może przeczytać w książce. Należy jednak, w miarę możności, oszczędzać mu zbyt wielkich różnic, przeto pewna koordynacja pomiędzy lekcjami a podręcznikiem jest konieczna. Odbieganie zbyt dalekie w układzie materjału, w sposobach dowodu, a zwłaszcza w symbolice i terminologji nie byłoby właściwe.

Podręcznik spełniłby swoje zadanie w zupełności tylko w tym wypadku, gdyby uczeń według niego łatwo mógł powtórzyć lekcję przerobioną w klasie oraz nauczyć się tych poszczególnych lekcyj, które opuścił. Taka książka powinnaby raczej posiadać charakter podręcznika szkolnego i samouczka do pracy domowej, odbywającej się bez nauczyciela lub korepetytora. Niestety, takich książek dotąd nie posiadamy, co gorsza zaś — nasze polskie podręczniki matematyki, może nawet mniej od podręczników obcych, liczą się ze względami natury psychologicznej i wiekiem młodzieży, wysuwają natomiast na pierwszy plan raczej troskę o poprawność teoretyczną. Ten brak odpowiednich książek jest niewątpliwie jedną z wielkich trudności przy nauczaniu matematyki w naszych szkołach, doświadczenie bowiem uczy, że polegać na notatkach ucznia z lekcyj, zwłaszcza w klasach niższych i średnich, zupełnie nie można. Jeśli nauczyciel w wyjątkowych wypadkach ucieka się do tego, to obarcza siebie wielką dodatkową pracą nadzwyczajnie starannego zredagowania całego materjału oraz skontrolowania go w zeszytach uczniowskich.

Ponieważ sprawie innych pomocy szkolnych do nauczania matematyki są poświęcone w tymże numerze „Poradnika" dal-

sze artykuły, przeto nie poruszamy jej tutaj, z wyjątkiem jednego szczegółu podstawowego: szkoła powinna posiadać dostatecznie obszerne i dobrze utrzymane tablice, nauczyciel zaś ma się troszczyć o to, aby cała klasa dobrze widziała to, co się na tablicy pisze [7]. Przejrzysty zapis na tablicy oraz celowe i estetyczne rozplanowanie tego zapisu podnoszą jego wartość. Niestety, rzeczy te są często w zaniedbaniu [8]. Przyrządy do kreślenia na tablicy zawsze powinny być w pogotowiu.

KONTROLA POSTĘPÓW UCZNIA.

Piśmienne wypracowania klasowe są przeznaczone dla kontroli postępów ucznia *). Rozporządzając małą liczbą godzin, nie możemy ilości tych wypracowań przesadzać, — od dwóch do trzech w ciągu okresu powinno wystarczyć. Rola tych ćwiczeń nie jest jednak podrzędna, gdyż uczeń, licząc się z tą formą kontroli, pozyskuje impuls do wzmożonego wysiłku dla opanowania materjału. Nadto, podczas tych ćwiczeń uczeń musi wykonać samodzielnie pewien całokształt pracy, co też jest cenne w przeciwstawieniu do ciągłego prowadzenia go na pasku w toku normalnej lekcji w klasie. Takie pozostawienie ucznia samemu sobie możliwe jest tylko dzięki temu, że praca, którą mu się daje, jest mniej lub więcej podobna do prac wykonanych poprzednio pod kierownictwem nauczyciela. Wartości ćwiczeń piśmiennych wystąpią tylko przy starannym doborze tematów oraz przy odpowiedniej organizacji tych ćwiczeń, zapobiegającej przedewszystkiem niesamodzielnej pracy uczniów. Niestety, taka niesamodzielność jest w naszych szkołach zjawiskiem dosyć pospolitem.

Poprawiać wypracowania należy bardzo starannie i konsekwentnie; musi być w tem styl przemyślany, gdyż poprawia-

7) Błędem byłoby sądzić, że w formie nauczania, zwanej uczeniem się pod kierunkiem, rola tablicy jest podrzędna. Jedną z koniecznych faz tej formy pracy nauczyciela jest zestawianie osiągniętych przez klasę wyników w postaci poprawnej, przejrzystej i zwięzłej, przyczem zapisywanie na tablicy będzie nieuniknione. Wystąpi też ono w fazie wyznaczania i rozplanowywania pracy.

8) W sprawie racjonalnego zapisu na tablicy oraz celowego podziału zbiorowej pracy pomiędzy poszczególnych uczniów porówn. art. Dr. L. Jeleńskiej p. t. *„Ważne zaniedbanie"* w Nr. 1 *„Parametru"*.

*) Tak było najczęściej w dotychczasowej praktyce szkolnej. Przy „uczeniu się pod kierunkiem" wypr. piśm. mogą mieć też i inne znaczenie.

nie błędów odgrywa w nauczaniu rolę niemniejszą od podawania wiadomości bezbłędnych. Oczywiście, nauczyciel powinien uważać za błędy tylko te miejsca, w których została zerwana konsekwencja myślenia, poprawne natomiast wnioskowanie, oparte na błędnych przesłankach, nie powinno być wytykane uczniowi lub hurtem podkreślane, jak to się często widzi. Ujemnem jednak świadectwem dla sposobu myślenia ucznia jest, jeżeli dochodzi do wniosków niedorzecznych i niedorzeczności tej nie spostrzega, — takie momenty należy wytykać narówni z błędami. Poprawione wypracowania piśmienne dobrze jest przechowywać w ciągu roku lub dwóch, jako bardzo charakterystyczny przyczynek do oceny pracy nauczyciela przez władze szkolne.

Ustne odpowiedzi ucznia, bądź to z miejsca, bądź przy tablicy, dają powód do ciągłego kształcenia jego języka i umiejętności ścisłego wyrażania swych myśli. Gdy więc uczeń rozwiązuje na tablicy zadanie, lub przeprowadza na niej dowód, to *należy wymagać, aby równolegle z pisaniem tłumaczył to ustnie*. Przytem i koledzy jego odbierają wrażenia jednocześnie obu zmysłami — wzrokiem i słuchem — oraz mają lekcję przykładową poprawnego mówienia, gdyż nauczyciel wszelkie błędy starannie koryguje. Należy tu jednak stwierdzić, że w wielu wypadkach wskazane będzie nie śpieszyć się z tą korektą, nie przerywać nią toku myśli ucznia, lecz wyczekać spokojnie na właściwy moment i wtenczas dopiero poprawić popełnione przezeń w mowie błędy językowe lub logiczne.

Skoro stwierdziliśmy, że *rzeczą najbardziej charakterystyczną dla wartości pracy nauczyciela są osiągane przez niego wyniki*, to zachodzi zagadnienie, jakie są właściwe kryterja wiedzy ucznia. Otóż, przerobiony materjał powinien być przyswojony w tym stopniu, aby uczeń umiał formułować poznane prawdy matematyczne, wykazywać związek pomiędzy niemi, stosować je do dalszych zagadnień, bądź to w zakresie matematyki, bądź innych nauk. Należy wymagać od ucznia, aby umiał powtórzyć dowody prawd, które poznał. Jakkolkiek bowiem słuszna jest znana zasada, że celem nauczania matematyki nie jest magazynowanie poszczególnych dowodów, lecz wyrobienie w uczniu umiejętności dowodzenia (*„uczmy nie dowodów, lecz umiejętności dowodzenia"*), to jednak należy stwierdzić, iż wyćwiczyć w uczniu tę umiejętność można tylko na pewnych kon-

kretach, — a będą niemi dowody poszczególnych twierdzeń, dostatecznie uważnie zbadane i utrzymane przez pewien czas w polu świadomości. Spotykane dawniej, dość często, recytowanie dowodów wyuczonych nie da się obronić, natomiast stwierdzić należy, że *dowód przemyślany i utrzymany przez pewien czas* w pamięci odegra swą rolę kształcącą, nawet jeżeli potem będzie zapomniany. Wymaganie to nie odnosi się do twierdzeń drugorzędnych lub twierdzeń - ćwiczeń. Niektóre natomiast rzeczy są tak charakterystyczne, tak typowe i ważne, że należy je pamiętać latami, niektóre zawsze. *Dążenie do wydobycia z matematyki jej wartości formalnych bez dostatecznego opanowania przez ucznia jej treści jest raczej fikcją.*

PRZYGOTOWYWANIE LEKCYJ PRZEZ NAUCZYCIELA.

Przygotowywanie lekcyj przez nauczyciela jest bardzo ważnym czynnikiem ich wartości. Nauczyciel początkujący powinien przygotowywać je bardzo szczegółowo, a czas dla tego celu poświęcony zawsze mu się opłaci. Przez pierwsze bowiem lata swej pracy fachowej albo się wyrobi i utrwali dobre nałogi, albo straci tę cenną możliwość i przyzwyczai się wykonywać swą pracę źle i niedbale. Bardziej doświadczeni nauczyciele też nie powinni uważać siebie za zupełnie zwolnionych od obowiązku przygotowywania się do lekcyj, — przynajmniej w celu ustalenia jej planu i doboru ćwiczeń, o których wartości decyduje nieraz pozornie drobny szczegół.

O PRÓBOWANIU NOWYCH METOD.

W rozważaniach powyższych nie poruszyliśmy zupełnie sprawy nowych form nauczania, które w ostatnich latach próbowano stosować. Przemilczenie to było zupełnie świadome, gdyż stosunek do metod, które przetrwały dłuższy szereg lat, musi być z natury rzeczy inny, bardziej zdefinjowany i zasadniczy, niż stosunek do metod nowych, których wartości doświadczenie jeszcze nie okazało w całej pełni. Nawoływanie ogółu nauczycielstwa do stosowania którejkolwiek z nich byłoby ryzykiem pośpiesznem i niczem nie uzasadnionem. Należy raczej sądzić, że do próbowania metod nowych mogą być powołane tylko wyjątkowe szkoły i wyjątkowi nauczyciele, których poświęcenie dla sprawy i dydaktyczne przygotowanie jest nieprzeciętne. Próbowanie bowiem nowych metod wymaga wielkiej ostrożności ze strony nauczyciela i ogromnego poświęcenia w znaczeniu wielkiego nakładu czasu i pracy. Oczywiście, bez nowych prób i poszukiwań nie może być nowych zdobyczy, ale nie oczekujmy zdobyczy łatwych.

W szeregu szkół naszych już poddano próbom te metody nauczania, które w ostatnich latach były modne w innych krajach. W kilku szkołach próbowano nauczać matematyki w formie „planu daltońskiego", przyczem nie osiągnięto wyników, któreby mogły zachęcić szerszy ogół nauczycielstwa. Ma się wrażenie, że obecnie już weszliśmy w okres odwrotu od formy daltońskiej w całokształcie nauczania, przyczem matematyka okazała się jednym z przedmiotów najmniej podatnych dla tej formy. T. zw. „system projektów" też nie wystarcza do przerobienia całokształtu matematyki elementarnej ze względu na jej budowę, najbardziej spoistą i konsekwentną; należy raczej uważać matematykę za jedną z tych nielicznych dyscyplin podstawowych, które trzeba umieścić w podwalinach wykształcenia intelektualnego w ujęciu ściśle systematycznem. Wreszcie, w ostatnich czasach spotyka się coraz więcej zwolenników t. zw. „uczenia się pod kierunkiem" — metody, z jednej strony stanowiącej formę odwrotu od planu daltońskiego, z drugiej strony mającej na celu uniknięcie braków tradycyjnego masowego nauczania, przy którem zbyt często aktywną i twórczą jest tylko niezbyt liczna grupa zdolniejszych uczniów w klasie. Niewątpliwie każda z tych form, nawet prędko przemijających, pewne rzeczy w naszem życiu szkolnem wyświetla i pewne momenty pożyteczne stwarza, czyniąc niemożliwym powrót do dawnych form bez żadnych zmian i korektyw. W szczególności metoda „uczenia się pod kierunkiem" wydaje się szczęśliwym kompromisem pomiędzy metodami masowemi a indywidualnemi. Lecz i w tej formie najistotniejsze momenty nauczania — doprowadzenie do pojęć zasadniczo nowych — nie mogą być podane, nauczyciel więc po dawnemu w najważniejszych momentach zmuszony jest do stosowania metody heurystycznej — w najszerszem znaczeniu tego słowa. W związku z tem należy stwierdzić, że i dawna metoda notowania na tablicy — przez samego nauczyciela lub przy pomocy lepszych uczniów — pewnych rzeczy, podawanych do wia-

domości ogółu klasy, w wielu wypadkach pozostanie wskazana, a bezwzględna walka z nią bynajmniej nie byłaby właściwa.

Można mieć obawy, że narzucanie „uczenia się pod kierunkiem" jako formy podstawowej byłoby bardzo niebezpieczne. Jest to raczej forma pomocnicza w stosunku do innych, można w niej przerobić pewne fragmenty i etapy nauczania matematyki, ale nie jego całość. Zwłaszcza fazą zestawiania osiągniętych wyników i przedstawiania ich w zupełnie poprawnej formie nigdy nie powinna być zlekceważona. Podawanie poprawnych wzorów myślenia było i pozostanie w nauczaniu niezmienną wartością. Dawniej te wzory narzucano dogmatycznie, dziś staramy się zawsze przygotować ucznia do ich przyjęcia — na tem polega istota i wartość heurezy — ale nie może być nauczania bez wzorów i zawsze muszą one zajmować poczesne miejsce.

Naogół, jakkolwiek należy zachęcać do szukania nowych dróg w nauczaniu, to jednocześnie należy też nawoływać do jak największej ostrożności w eksperymentowaniu dydaktycznem, bez niego nie może być, coprawda, postępu w metodach, lecz za eksperymentowanie niezręczne płacą rzesze uczniów, na których próby te są dokonywane. Przeto obowiązuje tu nauczyciela roztropny umiar, stosowanie metod nowych tylko w takich formach i takich dawkach, które napewno nie zaszkodzą.

W szkicu niniejszym nie zostały rozważone też i zagadnienia programowe, a złożyły się na to dwie przyczyny. Po pierwsze, programy nasze mają charakter raczej ramowy i pozostawiają nauczycielowi znaczną swobodę interpretacji; po drugie, weszliśmy w okres ich stopniowej rewizji *), przed której dokonaniem jesteśmy zobowiązani do lojalności względem programów dawnych, jakkolwiek nie możemy twierdzić, że są one dobre we wszystkich szczegółach i że dadzą się wykonać konsekwentnie w nowych warunkach — znacznie odmiennych od tych, w jakich powstawały. Zapewne niejedna z tez, ustalonych w toku niniejszych rozważań, mogłaby posłużyć za przesłankę przy tej rewizji programów, lecz nie tu miejsce na rozwijanie szczegółów.

*) Szkic ten został napisany w jesieni 1930 r.

O WYCHOWAWCZEM ZNACZENIU NAUCZANIA MATEMATYKI.

Główną troską nauczyciela matematyki, jak i główną troską dyrekcji szkoły w stosunku do jego pracy, powinno być poprawne stanowisko wychowawcze w nauczaniu. Wystarczyłby pobieżny przegląd czynności nauczyciela, aby wykazać, że na każdym kroku swej pracy dydaktycznej musi on w sposób nieunikniony wywierać wpływ wychowawczy na ucznia, gdyż bez tego i samo nauczanie nie byłoby możliwe *). Ta korzyść wychowawcza, polegająca na kształtowaniu charakteru i intelektu ucznia, posiada wartość daleko większą od poszczególnych korzyści dydaktycznych. Specyficzne cechy matematyki w tej pracy wychowawczej są bardzo wyraźne. Nauczanie matematyki może i powinno być tak postawione, aby przyczyniało się do formalnego rozwoju ucznia, uczyło go myśleć analitycznie i syntetycznie [9]), uczyło rzetelności i dokładności w myśleniu, ścisłego i poprawnego wyrażania myśli, rozwagi w wypowiadaniu sądów, przyczyniało się do wyrobienia w uczniu pracowitości i punktualności w pracy **).

Wreszcie, matematyka podaje przykłady prawd bezwzględnych, w czem — zdaniem Russell'a — tkwi ogromna jej wartość wychowawcza w dobie obecnej, rozpowszechnionego scep-

*) Porówn. Dr. O. N i k o d y m. *Dydaktyka matematyki czystej*. Tom I. Ogólne uwagi dydaktyczne. Zwłaszcza str. 7.

[9]) Umyślnie nawiązujemy tu do terminów antycznych i wyjaśnienia, podanego w początku XIII księgi Euklidesa, gdyż starożytni z wielką przenikliwością i szczerością stwierdzili, że synteza, odpowiadająca naszej dedukcji, jest metodą przedstawienia znalezionego dowodu w poprawnej formie Metodą twórczą była dla nich analiza (nie mówiąc już o metodach nawskroś intuicyjnych, tak pięknie opisanych przez Archimedesa w jego liście do Eratosthenesa), dla nas — analiza starożytnych, lub redukcja, lub wreszcie indukcja matemat. Należy żałować, że w celach nauczania mówiło się u nas tylko o dedukcji z pominięciem innych metod, posiadających większą siłę twórczą.

**) „Ci, którzy widzą użyteczność matematyki tylko w jej pospolitych zastosowaniach",—pisał Poinsot w swem pierwszem sprawozdaniu o uniwersytecie — „mają pogląd na tę sprawę bardzo niedoskonały. Nie same teorje, rachunki, przekształcenia stanowią największą matematyki wartość, lecz godne podziwu ich powiązanie, ćwiczenie, które one zapewniają umysłowi, piękna i subtelna logika, którą doń wprowadzają na zawsze... Wszystkie przekształcenia i teorje, których się uczymy, mogą ulotnić się z naszej pamięci, ale prawdziwość i siła, nadane przez nie naszemu rozumowaniu, pozostaną; duch matematyki pozostanie i na podobieństwo pochodni będzie oświetlał nam drogę w naszej lekturze i w naszych poszukiwaniach".

tycyzmu w zakresie zagadnień etycznych, filozoficznych i naukowych *). „Niema innej podstawy — mówił Poinsot — dla kultury sądu, jak ćwiczenie w dyscyplinie, która się nie daje nagiąć i spaczyć, a przez którą dokonywa się rozróżnienia prawdy od fałszu" **). Prawdy matematyczne, jako najbardziej przejrzyste i bezwzględne, najlepiej uczą prawości i sumienności w myśleniu. Człowiek wychowany w tej rutynie reaguje obrzydzeniem na sofizmaty i pseudo-prawdy, podyktowane przez oportunizm życiowy, gdy więc nawet pobudki ujemne pod względem moralnym biorą w nim górę, nie stara się uzasadnić ich jako pobudki o dodatniej wartości etycznej, nie szerzy więc przynajmniej świadomie w swem otoczeniu zamętu pojęć etycznych. Jeżeli przeto chcemy kształcić w młodzieży prawość obywatelską i siłę przekonań, to w nauczaniu matematyki znajdziemy czynnik o dużej mocy. Prawdy matematyczne są niejako najbliższe prawd wiecznych i jako takie dają wychowawcy, przy odpowiedniem wyrobieniu, jedno z najdoskonalszych źródeł do czerpania wpływów uszlachetniających.

O AKTUALIZOWANIU MATERJAŁU NAUCZANIA

Do wartości wychowawczych w nauczaniu matematyki przyjęto nawiązywać zagadnienie aktualizacji materjału nauczania. Jednem z zadań nauczania arytmetyki w szkołach niższych jest rozbudzenie zainteresowania wśród młodzieży do stosunków liczbowych, istniejących w jej otoczeniu, oraz wdrożenie do poprawnego wyobrażania tych stosunków [10]). Słuszność tej tezy nie da się zaprzeczyć, w odniesieniu zaś do szkolnictwa polskiego nakazuje ona przy nauczaniu rachunków czerpać materjał obficie z danych, dotyczących przyrody naszego kraju, jego zaludnienia, jego dróg komunikacji, rolnictwa, przemysłu i handlu oraz podziału administracyjnego. W dawniejszych naszych podręcznikach strona ta niedostatecznie była uwzględniana. Korzystny zwrot pod tym względem przedstawiają dwie książeczki Rusieckiego i Zarzeckiego dla IV i V oddziału szkoły powszechnej oraz wskazówki metodyczne do nich.

*) Porówn. B. Russell. *Mysticism and Logic.* (Istnieje przekład francuski. *Le Mysticisme et la Logique.* L'étude des Mathématiques. Payot, Paris).

**) Cytata z Poinsot jest podana według L. Brunschwicg. Un Ministère de L'Education Nationale.

[10]) Porówn. J. W. A. Young. *The teaching of mathematics in the elementary and secondary school.* Chicago, 1929.

O ile w niższem gimnazjum tendencja ta w doborze materjału ćwiczebnego nie nasuwa żadnych wątpliwości (jakkolwiek i tu należy ostrzec przed przesadą) i może być realizowana na podstawie istniejących a wymienionych powyżej wzorów [11]), o tyle w gimn. wyższem spotyka się ona ze znacznemi trudnościami: materjał nauczania jest z natury rzeczy coraz bardziej abstrakcyjny, czasu na jego wykonanie ma nauczyciel b. mało, wskutek czego jest niemal zmuszony do szukania najkrótszych dróg w wykonywaniu kursu i skrzętnego omijania wszelkich kwestyj pobocznych. Ma się wrażenie, że tylko bardzo nieliczne zagadnienia aktualne dadzą się nawiązać do kursu matematyki w gimnazjum wyższem. Przykłady poszczególnych fragmentów możnaby znaleźć np. w „Mathematisch Physikalische Bibliothek" Teubnera, wszakże nadają się one raczej do lektury pozaszkolnej ucznia lub do pracy w kółkach uczniowskich.

Można mieć obawę, że gdybyśmy chcieli wszędzie i za wszelką cenę aktualizować, zubożylibyśmy materjał nauczania ściśle matematyczny i te jego wielkie wartości wychowawcze, które zostały przedstawione w poprzednim fragmencie niniejszych uwag.

[11]) Jako źródła do samodzielnego aktualizowania materjału przez nauczyciela należy wymienić:

1) *Mały Rocznik Statystyczny.* Warszawa. Nakład Głównego Urzędu Statystycznego.

2) *Świat w Cyfrach.* Rocznik Instytutu Kartograficznego im. E. Romera pod red. Wąsowicza i Zierhoffera.

3) *Szkolny Atlas Statystyczny Polski* w opr. Weinfelda, Szturm de Sztrema i Piekałkiewicza. Wyd. Bibl. Polskiej.

4) *Wiadomości Statystyczne.* Perjodyczne wydawnictwo Głównego Urzędu Statystycznego, przeznaczone dla najszerszych kół interesujących się życiem publicznem w Polsce, wychodzi 5, 15 i 25 każdego miesiąca.

Dopisek w sprawie heurezy. Nie staramy się tu podać dokładnej definicji heurezy, ograniczymy się do cytaty, która charakteryzuje ducha metody. „Ćwiczenie, o którem powyżej była mowa — mówi prof. Young — a które w gruncie rzeczy jest główną wartością i głównym celem nauczania matematyki w szkole średniej, może odbywać się tylko w ten sposób, że uczący się sam dokonywa wnioskowania; nie może ono polegać — w stopniu godnym omawiania — na prostem zgadzaniu się z poprawnością wniosków, wyprowadzanych przez kogoś innego, t. j. przez autora podręcznika lub przez nauczyciela". Dalej tenże autor mówi: „tekst i wskazówki nauczyciela powinny poprostu pomagać i przewodniczyć w pracy, ale nie wykonywać ją w samej rzeczy... bez pracy o takim charakterze studja matematyczne są prawie bezużyteczne dla kultury umysłowej".

O STOSOWANIU MODELI W KURSIE PROPEDEUTYCZNYM GEOMETRJI.

Nieliczne tylko jednostki zdolne są wyrobić sobie wyobrażenia przestrzenne i osiągnąć pewien stopień rozwoju wyobraźni przestrzennej samodzielnie, dzięki specjalnemu nastawieniu zainteresowań i uwagi przy obserwacji otaczającego świata. Kształty nas otaczające nie są dość proste i dostarczają zbyt obfitego materjału do obserwacji; prócz tego fizyczne własności przedmiotu przesłaniają niejednokrotnie przed nami jego kształt geometryczny. Tem się tłumaczy, że jakkolwiek ludzie obracają się stale wśród przedmiotów trójwymiarowych i w trójwymiarowej przestrzeni, jednak na podstawie doświadczenia życia codziennego większość ich wyrabia sobie bardzo mętne wyobrażenia geometryczne. Kurs systematyczny zapoznaje ucznia z pojęciami geometrycznemi przy pomocy szeregu definicyj. Najściślejsza jednak definicja może się przyczynić do wytworzenia przez jednostkę pewnego pojęcia tylko o tyle, o ile jednostka ta posiada w swej świadomości wystarczającą ilość opartych na licznych i różnorodnych wrażeniach zmysłowych wyobrażeń, których uogólnieniem ma być dane pojęcie. Właśnie psychologiczne ugruntowanie przyszłych pojęć geometrycznych łącznie z rozwijaniem wyobraźni przestrzennej ucznia stanowi główne zadanie propedeutycznego kursu geometrji. To też nauczyciel tego przedmiotu powinien dobierać ćwiczenia w ten sposób, by dostarczyły one uczniom jak najwięcej materjału doświadczalnego w postaci wrażeń wzrokowych, dotykowych i mięśniowych, związanych z kształtami geometrycznemi, a następnie tak kierować uporządkowaniem i utrwaleniem tego materjału, by w umysłach dzieci powstały dokładne i jasne wyobrażenia geometryczne, oraz by rozwój wyobraźni geometrycznej ucznia został doprowadzony do poziomu, przy którym dziecko potrafi w każdej chwili z łatwością wywołać w swej świadomości potrzebne mu wyobrażenie i tem wyobrażeniem operować.

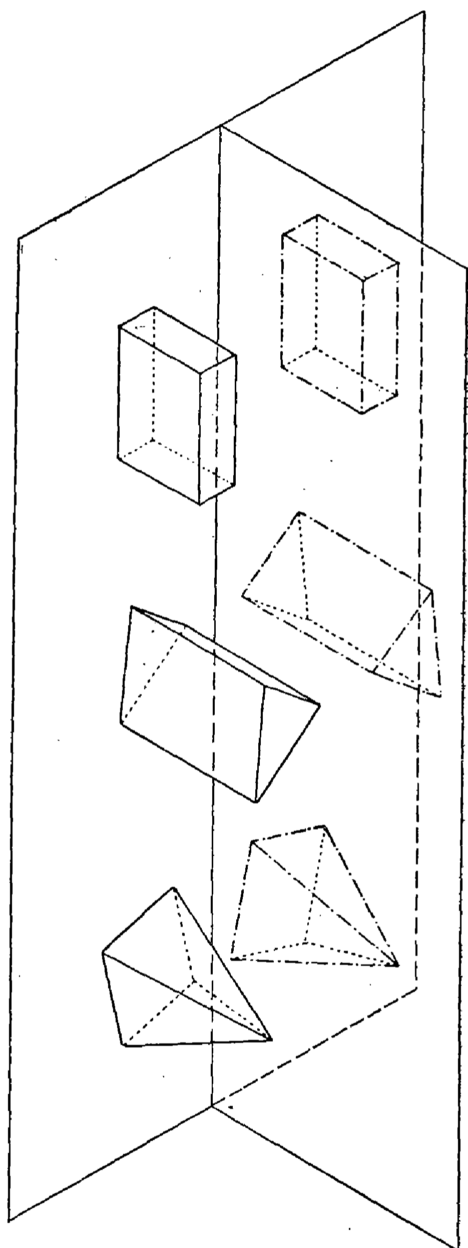
Do zrealizowania tych zadań konieczne jest jaknajszersze zastosowanie modeli. Znaczna nawet ilość precyzyjnie wykonanych modeli pokazowych, zakupionych lub sporządzonych przez uczniów na lekcjach robót ręcznych, nie wystarczy. W umysłach dzieci muszą pozostać liczne i rozmaite wyobrażenia tej samej bryły, lub figury geometrycznej, a więc dzieci muszą poznać ją w różnych jej położeniach, w rozłożeniu na różne składowe części, w różnych odmianach, zależnie od wymiarów, liczby boków, kątów i t. p. W niektórych więc częściach kursu do każdej prawie lekcji potrzebne są inne modele, a że dzieci muszą nietylko widzieć model, lecz również dotknąć go, wziąć w rękę, a nieraz rozciąć i złożyć inaczej, więc przeważnie każde dziecko musi mieć raczej niewielki, mniej precyzyjnie i trwale wykonany, ale oddzielny model do własnego użytku. Takie modele mogą produkować w związku z lekcjami propedeutyki geometrji sami uczniowie, którym te modele są w danej chwili potrzebne. *Praca nad sporządzaniem modelu jest ćwiczeniem dla ucznia bardzo kształcącem*, gdyż z jednej strony rozwija zdolności konstrukcyjne, a tem samem wyobraźnię przestrzenną ucznia, z drugiej zaś strony dostarcza uczniowi szeregu wrażeń zmysłowych, które w propedeutyce geometrji mają tak wielkie znaczenie. Niektóre modele mogą być wykonane na lekcjach propedeutyki pod bezpośrednim kierunkiem nauczyciela, np. sporządzane z patyczków i plastyliny szkielety brył, na których daje się uwidocznić (również przy pomocy patyczków i plastyliny) rozmaite przekroje tych brył. Przeważnie czas jest wyzyskany produkcyjniej, jeżeli sporządzanie modeli stanowi składową część domowych ćwiczeń ucznia. Model, wykonany w domu przez ucznia, może być zużytkowany przez nauczyciela rozmaicie. Można się posługiwać takim modelem, jako pomocą naukową przy opracowaniu nowej lekcji. W takim razie nauczyciel poleca uczniom sporządzenie modelu na lekcji, poprzedzającej tą, do której model ma być potrzebny. Uczniowie wykonywają model, nie wiedząc, do jakiego użytku ma służyć. Dopiero w klasie pod kierunkiem nauczyciela

uczeń dostrzega pewną nową własność skonstruowanej przez siebie figury, względnie wykrywa przy jej pomocy pewną nową dla siebie prawdę geometryczną. Przykład: przy przerabianiu działu jednokładności i podobieństwa figur trójwymiarowych w kl. III po należytem wyjaśnieniu pojęcia podobieństwa brył, nauczyciel poleca na jednej z lekcyj, by każdy uczeń wykonał w domu otwarte (czyli niezamknięte podstawami) modele dwu ostrosłupów o stosunku odpowiednich krawędzi 2 : 1 dla jednej połowy klasy i 3 : 1 dla drugiej; na lekcji najbliższej uczniowie, przesypując piasek przy pomocy sporządzonych modeli, dochodzą pod kierunkiem nauczyciela do wniosku, że objętości brył podobnych są w takim stosunku, jak sześciany ich krawędzi. Zastosowanie opisanego sposobu postępowania do równoważności figur płaskich i szeregu innych działów propedeutyki geometrji znajdujemy w „Początkach nauczania geometarji" I. Jezierskiej. Jednak poszczególne lekcje, a nawet całe działy propedeutyki (np. symetrja w przestrzeni, rzuty prostokątne i t. p.) wymagają stosowania modeli o tyle skomplikowanych, że dzieci mogłyby je wykonać dopiero po wyjaśnieniach, składających się na treść lekcji, która miałaby być przy pomocy tych modeli opracowana. Przy przerabianiu tych działów nauczyciel wyjaśnia nowe pojęcia i nowe prawdy geometryczne bądź na modelach pokazowych, o ile je posiada, bądź na modelach przygodnych, czyli na przedmiotach najbliższego otoczenia. Dopiero po dokładnem opracowaniu nowej treści nauczyciel poleca uczniom, by zinterpretowali poznane pojęcie, względnie zilustrowali wykrytą prawdę na modelu własnej roboty. Nauczyciel podaje parę możliwych sposobów takiej interpretacji, oraz pewne wskazówki co do materjału, z którego model mógłby być wykonany, pozostawia jednak znaczną swobodę uczniowi, podnieca to bowiem pomysłowość i energję tego ostatniego. Na najbliższej lekcji wszyscy uczniowie zaopatrzeni są w modele, przy których pomocy nauczyciel może powtórzyć z uczniami materjał, przerobiony na poprzedniej lekcji, sprawdzić, o ile dokładnie i dobrze została zrozumiana i przyswojona przez uczniów treść tej lekcji, względnie sprostować pewne błędy i niedociągnięcia w ujęciu tej treści u poszczególnych uczniów. Opisy stosowania modeli przygodnych do wyjaśnienia nowych pojęć geometrycznych, oraz szereg ćwiczeń, które nasuwają pomysły modeli, nadających się do

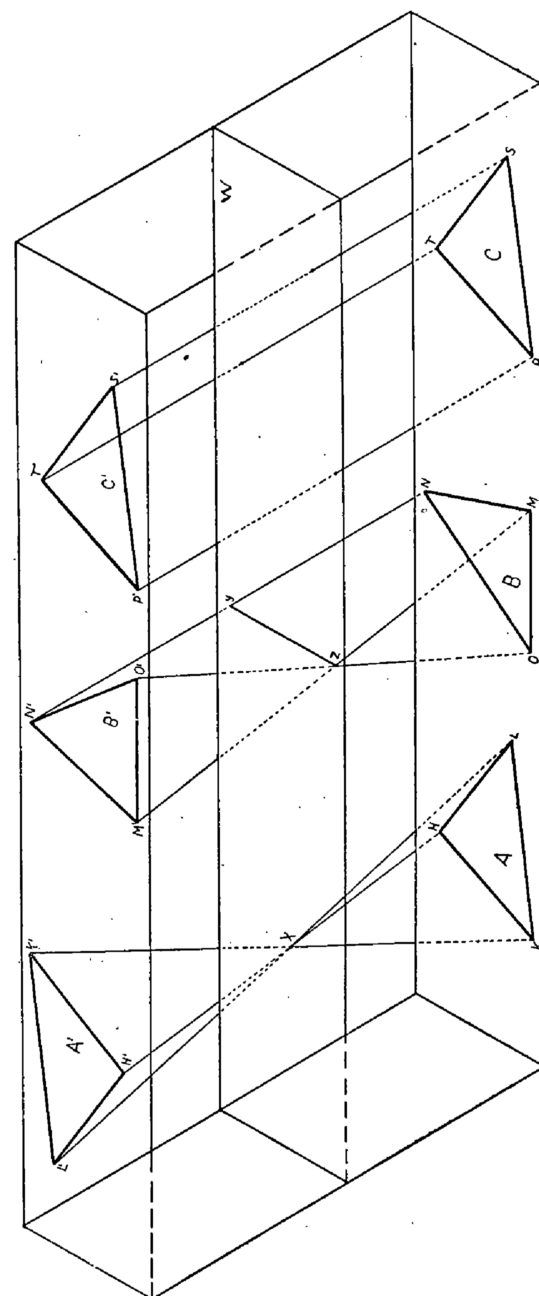
wykonania przez uczniów, znajdujemy w „Podręczniku geometrji dla kl. III" Dr. Kalicum-Chodowickiego.

Wartość i trwałość sporządzonych przez dzieci modeli bywa bardzo rozmaita; niektóre rozpadają się w ręku i zaledwie mogą służyć do stwierdzenia, że dziecko dobrze zrozumiało interpretowane przez siebie pojęcie; inne znów modele zawierają błędy i służą do wyłowienia uczniów, których wiadomości wymagają sprostowania lub uzupełnienia; wreszcie znajdzie się zawsze kilka przynajmniej modeli tak pomysłowych, a tak porządnie i trwale wykończonych, że, chociaż wykonane prostemi środkami, nadają się do przechowania i stosowania w latach następnych w roli modeli pokazowych. Posiadanie kolekcji takich modeli z czasem ułatwia bardzo nauczycielowi prowadzenie lekcyj propedeutyki, gdyż redukuje do minimum wypadki, w których koniecznem jest posługiwanie się modelami przygodnemi, a tem samem skraca znacznie czas, potrzebny do przerobienia poszczególnych działów.

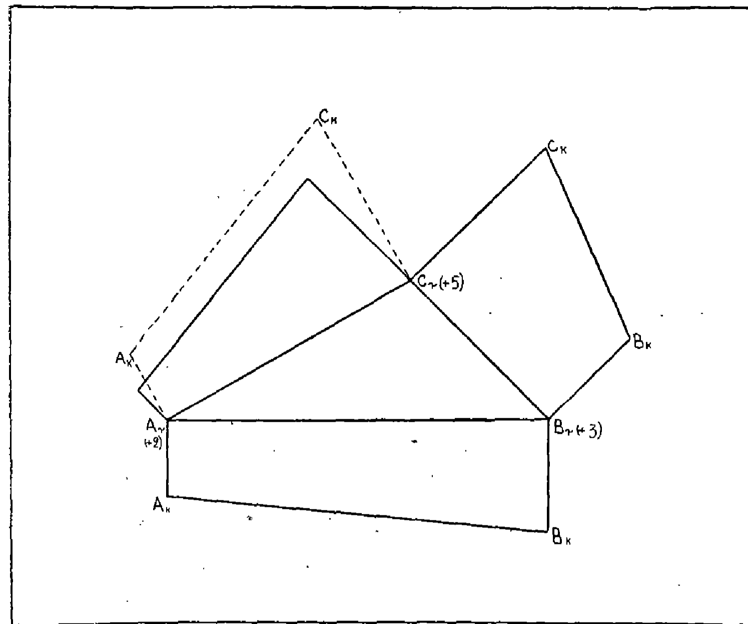
Wykonania prostych i łatwych modeli — np. uwidoczniających rzut cechowany punktu, odcinka, lub rzut i kład odcinka— można żądać od wszystkich dzieci bez wyjątku (nie obstając jedynie, by modele były zbyt dokładne i trwałe). Jeżeli jednak do ilustracji pewnej treści potrzebna jest większa ilość bardziej skomplikowanych modeli, każdy uczeń może wykonać podług własnego wyboru jakąkolwiek z grup modeli, wskazanych przez nauczyciela, względnie nawet jeden poszczególny model. Np. w dziale symetrji przestrzennej jeden uczeń może wykonać modele kilku brył z uwidocznioną płaszczyzną, osią, lub uwidocznionym środkiem symetrji, inny może uwidocznić dla jednej bryły jej środek i rozmaite osie oraz płaszczyzny symetrji. Model na rysunku 1 przedstawia trzy pary brył ustawionych symetrycznie względem płaszczyzny symetrji. Model na rysunku 2 zestawia trzy różne rodzaje symetrji przestrzennej, gdyż ta sama para trójkątów w położeniach A i A' jest umieszczona symetrycznie względem środka X, w położeniach B i B' — symetrycznie względeh osi YZ, w położeniach C i C' symetrycznie względem płaszczyzny W (w praktyce dzieci wykonywają ten model, wyszywając trójkąty na przeciwległych ścianach kartonowego pudełka i umieszczając środek i oś symetrji na umocowanej wewnątrz pudełka kartonowej przegródce, która służy również za płaszczyznę symetrji). Rysunek 3 przedstawia model, który jest



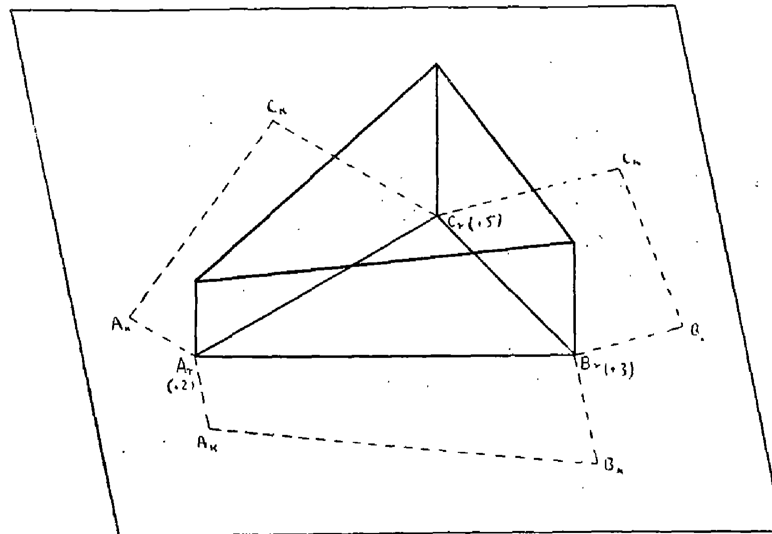
Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.



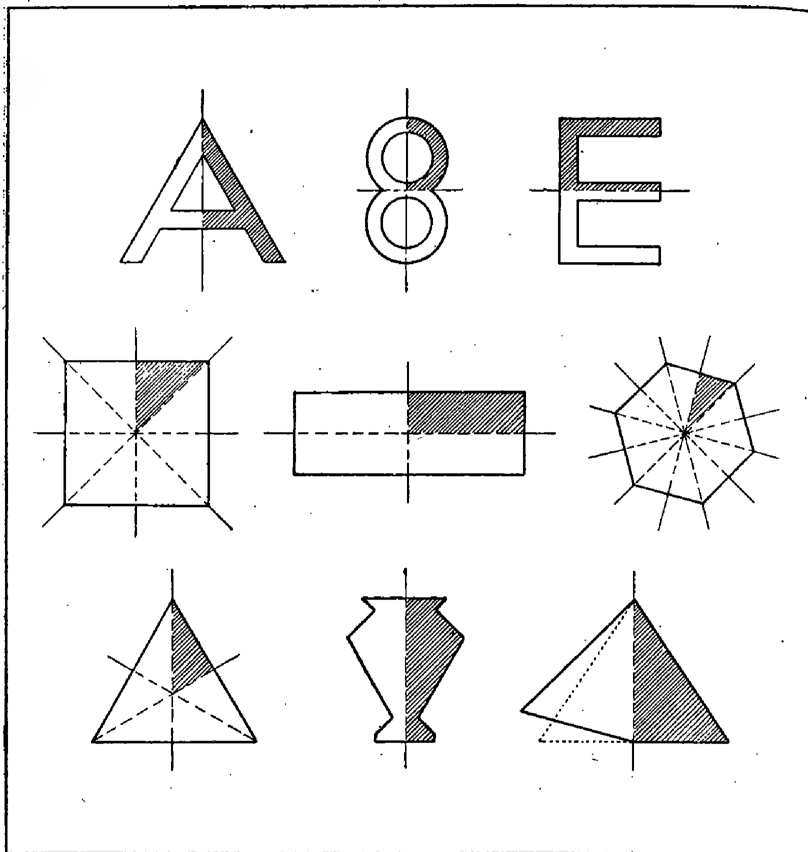
Rys. 3 a.

ilustracją do zadania: wykreślić trójkąt *ABC*, mając jego rzut cechowany *Ar Br Cr*; trapezy: *Ar Br Bk Ak*, *Br Cr Ck Bk* i *Ar Cr Ck Ak* (które przy konstrukcji dają nam kłady, a więc i prawdziwą długość boków żądanego trójkąta) na modelu są wykonane z drutu, tak że możemy je obracać dokoła rzutów poszczególnych boków; ustawiając te trapezy pionowo (zob. rys. 3a), otrzymujemy z boków *Ak Bk*, *Bk Ck* i *Ak Ck* żądany trójkąt *ABC* w jego prawdziwem położeniu w przestrzeni.

Bardzo wiele modeli można umocować w zeszytach dzieci w ten sposób, że doświadczenie wykonane na tych modelach, daje się powtórzyć w każdej chwili. Jeżeli np. figurę, złożoną z trójkąta *Ar Br Cr*.(zob. rys. 3) i obracających się trapezów, wytniemy z kolorowego papieru i nalepimy w zeszycie, przytwierdzając klejem tylko trójkąt *Ar Br Cr*, to trapezy będą się obracały dokoła boków tego trójkąta i dadzą się zarówno ułożyć poziomo, jak ustawić pionowo (zob. rysunki 3 i 3 a). Rysunek 4 przedstawia szereg figur płaskich z kolorowego papieru, przylepionych do zeszytu tylko zakratkowaną częścią; model uwidocznia osie symetrji wspomnianych figur i fakt, że przy przełamaniu wzdłuż osi symetrji poszczególne części figury przystają do siebie. W „Początkach nauczania geometrji" I. Jezierskiej na kl. II znajdujemy rysunki, przedstawiające sposób umocowania w zeszycie modeli do ilustracji równoważności figur płaskich.

Specjalną grupę stanowią modele brył najprostszych — sześcianu, prostopadłościanu i t. d., na których dzieci, rozpoczynając naukę geometrji, zapoznają się z temi bryłami. Modele te z konieczności muszą być wykonane na lekcjach propedeutyki, lub robót ręcznych przez uczniów z lat poprzednich i przechowane do użycia w klasie początkującej. Na tych gotowych modelach dzieci poznają ważniejsze cechy brył najprostszych i przerabiają z temi modelami szeregi ćwiczeń, prowadzących najpierw do wytworzenia się w umyśle dziecka dokładnego i jasnego obrazu danej bryły, a następnie do uniezależnienia tego obrazu od modelu. W końcu te same modele służą do zapoznania dzieci z siatką danej bryły, a to przez rozcięcie modelu wzdłuż pewnych krawędzi; rozwinięcia dokonywa każde dziecko na własną rękę na swoim modelu. Po tem ćwiczeniu, dzieci z siatek, sporządzonych własnoręcznie, wyklejają nowe modele, przeznaczone do użytku najmłodszych uczniów w roku następnym.

Z pośród modeli, produkowanych przez wytwórnie pomocy naukowych i nadających się do stosowania w kursie propedeutycznym geometrji, prócz kompletów brył kartonowych i drewnianych oraz modeli różnych jednostek mierniczych układu metrycznego, należy wymienić: 1) drewniane modele brył, roz-



Rys. 4.

cięte w sposób uwidoczniający niektóre przekroje tych brył; 2) otwarte blaszane modele stożka i walca, na których przez przelewanie wody, lub przesypywanie piasku można wykazać, że objętość stożka jest trzy razy mniejsza od objętości walca o tej samej podstawie i wysokości; 3) składany model koła, na którym można wyjaśnić dzieciom wzór na obliczanie pola koła.

MODELE PRZY NAUCZANIU MATEMATYKI W GIMNAZJUM WYŻSZEM.

Istnieli dawnej matematycy, którzy uważali, jakoby stosowanie modeli uwłaczało honorowi nauczyciela i jakoby było przeciwne abstrakcyjnemu charakterowi matematyki. „Im gorszy matematyk, tem więcej rupieci potrzebuje", mawiał niejeden nauczyciel starszej daty. Dziś patrzymy na kwestję modeli inaczej. Dydaktyka matematyki stanęła na stanowisku Locke'a i jego dewizy „nihil est in intellectu, quod non antea fuerit in sensu". (All thought begins in feeling). Wierzymy dziś, że pojęcia abstrakcyjne tworzą się na długiej drodze doświadczeń zmysłowych i stosownie do tego przekształciła się dydaktyka. Nie stało się to jednakże, jak się zdaje, w dostatecznej mierze, bo posługiwanie się modelami ma u nas jeszcze charakter dorywczy. Mianowicie, jeżeli chodzi o klasy wyższe, to zasada poglądowości nie przenika dostatecznie systemu nauczania.

Jest rzeczą bezsprzeczną, że wyemancypowanie się od pomocy modelu jest jednym z celów nauczania geometrji—i w tym sensie mieli dawniejsi matematycy rację, ale niewiadomo, na którym stopniu nauczania zrzec się można tej pomocy. Przy nauczaniu zespołowem granicy stałej tutaj niema, bo wyobraźnia geometryczna jest u każdego ucznia inaczej rozwinięta. Uczeń, który już jako dziecko przedszkolne odwiedzał rzemieślników, mianowicie stolarzy i stelmachów, i przyglądał się ich pracy, lub może sam ich prace naśladował, przynosi nieraz do szkoły taką dozę wypobraźni geometrycznej, że modele wydają się dla niego od samego początku zbyteczne. Inny znów uczeń, który takich wrażeń nigdy nie odnosił i nie szukał i nigdy świadomie na po-

wstawanie utworów bryłowych nie patrzał, będzie się nieraz musiał posługiwać modelami aż do najwyższej klasy. Ze względu właśnie na takich uczniów nie należy gardzić modelami na każdym stopniu nauczania, bo będą one dla niejednego ucznia konieczne, a uczniowi, który się bez nich obyć może, nie zaszkodzą; przeciwnie, obserwować można, że każdy, kto ma jakiś utwór geometryczny oddawna trwale w wyobraźni, z przyjemnością powita swego starego znajomego, ukazującego się naraz przed nim w stanie zmaterjalizowanym. Wiadomo też jest, że sam matematyk, choć on modelu najmniej potrzebuje, najwięcej ma z niego uciechy. Ale i badający matematyk ucieka się nieraz do pomocy modelu, np. przy studjum geometrji różniczkowej. Jak Anteusz w walce z Herkulesem coraz to nowych sił nabierał, zetknąwszy się z matką ziemią, tak studjum matematyki znajduje w zetknięciu się zmysłowem ze zjawiskami świata materjalnego stałe i najsilniejsze oparcie.

Ile to pięknych modeli uczniowskich ginie rocznie w Polsce, bo niema dla nich stosownego pomieszczenia. Najpiękniejsze przyrządy, nieraz oryginalne pomysły psują się, bo ustawione w klasie lub sali nauczycielskiej, zawadzają i nie znajdują należytej opieki, a w końcu zostają tak bezpiecznie schowane, że nauczyciel w chwili potrzeby odnaleźć ich nie może. Starannego przechowywania ładnie i z zamiłowaniem sporządzonych modeli wymaga już sam nakaz poszanowania pracy. Gdyby ten nakaz był przestrzegany, t. j. gdyby matematyczne przyrządy były strzeżone przed zniszczeniem, toby każda szkoła już oddawna była w posiadaniu pokaźnych zbiorów. Poznańska Wystawa Krajowa pokazała, jak wielką jest pomysłowość i wytwórczość nauczyciela i ucznia polskiego. Ale gdzie podziały się wszystkie te rzeczy? Po wystawie, kiedy zbiory wróciły do poszczególnych szkół, przedmioty znikły, częściowo popsuły się, albo też marnieją w piwnicach szkolnych.

Z powyższych rozważań wyciągamy wniosek: tak jak zbiory fizyczne i przyrodnicze, tak też zbiory matematyczne muszą zdobyć sobie prawo obywatelstwa, a to w ten sposób, że każda szkoła musi zbiory matematyczne zakładać, objąć katalogiem, a dla przechowania zbiorów musi mieć do dyspozycji pokój, a przynajmniej stosowne oszklone szafy. Szafy te muszą być dostępne dla każdego nauczyciela matematyki.

Wytwarzanie aparatów może być powierzone w zupełności samym uczniom według wskazówek nauczyciela, jakkolwiek nie wyklucza się możności zakupu modeli gotowych. Jeżeli będzie każdemu uczniowi wolno na swem dziele umieścić trwale swe nazwisko, to się owe szafy w krótkim czasie aparatami zapełnią. Nie jest konieczne, aby uczeń, obarczony już zadaniami domowemi, poświęcał nadmiernie swój wolny czas budowie aparatów. Jest wskazane, aby się to działo na lekcjach robót ręcznych pod kierownictwem nauczyciela tychże robót. Nauczyciel matematyki powinien w tym celu utrzymywać kontakt z nauczycielem robót. Nie zapominajmy bowiem o korzyściach, jakie odniesie sama nauka robót ręcznych przez wykonywanie modeli matematycznych. Jeżeli przeniknie ją myśl matematyczna, to się podniesie jej poziom i nauka robót ręcznych stanie się jeszcze w większej mierze, niż to jest obecnie, jednem z niezbędnych ogniw ogólnego koncentrycznego kształcenia. Wzajemne przenikanie się przedmiotów nauczania jest, jak wiadomo, jednym z najważniejszych postulatów dydaktyki.

O MODELACH W SZCZEGÓLNOŚCI.

Można rozróżnić trzy rodzaje modeli:

1) modele „improwizowane" podczas lekcji;

2) modele „uczniowskie", w małych rozmiarach do użytku w rękach ucznia;

3) modele „demonstracyjne" w rozmiarach większych, dla demonstracyj przed całą klasą.

1) Modele improwizowane.

Modele improwizowane są to takie, które się na poczekaniu robi z przedmiotów, będących pod ręką. Np. Otwieram książkę i objaśniam pojęcie kąta nachylenia dwu płaszczyzn. Zginam kartę papieru i wyjaśniam przy pomocy ołówka rzuty i ślady prostej na rzutni poziomej i pionowej. Wieszam na końcu laski sznurek obciążony i demonstruję zmienność sinusa i cosinusa przy tablicy lub ścianie.

Niezawsze jednakże ma się pod ręką stosowne przedmioty do zaimprowizowania modelu. Dlatego też należy mieć w pogotowiu:

1) pręciki drewniane oraz druty;
2) deseczki (poprzedziurawiane dla przesuwania pręcików);
3) zapas sznurka;
4) plastylinę (do łączenia pręcików);
5) nożyce i nóż;
6) zapas papieru i kartonu;
7) zapas gwoździ i pluskiewek.

Wszystko to należy mieć w osobnej skrzynce, którą można w całości zabrać do klasy.

2) Modele uczniowskie.

Są to modele, które można mieć w takiej ilości, aby każdy uczeń mógł dostać jeden egzemplarz do ręki.

Ilość taka powinna się z czasem w szkole uzbierać przez kilkoletni wybór najlepszych okazów, jakie sporządzili uczniowie. Nie jest bowiem wskazane, aby każdy uczeń każdy model sam budował. Zabiera to często zbyt wiele czasu. Zapas modeli uczniowskich jest też z tego powodu potrzebny, że prawie zawsze pewna liczba uczniów przynosi tak niemożliwe potwory do szkoły, że na nich niczego nauczyć się nie można. Wtedy daje im się do ręki modele ze zbioru szkolnego.

Modele „uczniowskie" powinny być wykonane na wzór modelu „demonstracyjnego". O tym rodzaju modeli mówimy w następnych wierszach.

3. Modele „demonstracyjne".

Są to modele starannie i *trwale* wykonane w takich rozmiarach, że każdy uczeń może ze swego miejsca widzieć dokładnie ich części. Obfity zbiór modeli takich — w estetycznem wykonaniu — powinien być chlubą każdej szkoły. W nauce systematycznej stereometrji oraz w geometrji wykreślnej są one niezbędne.

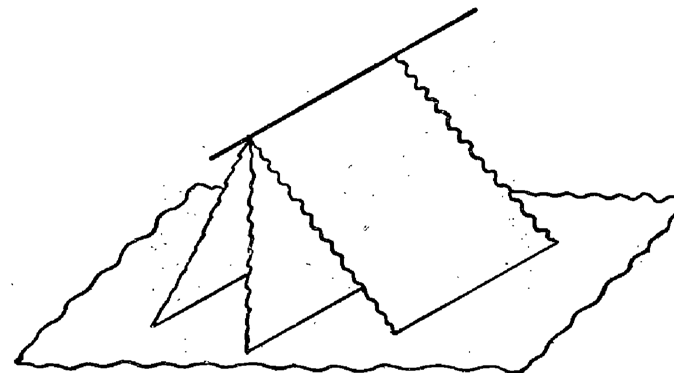
Ale i w innych dziedzinach matematyki, jak planimetrja, mogą modele być pożyteczne. Nie wymieniamy ich, aby nie krępować pomysłowości nauczycieli i uczniów, ale powitamy udane pomysły z zadowoleniem.

Poniżej wymieniamy szereg twierdzeń, przy których nauczaniu uważamy modele za konieczne. Jest jednakże rzeczą oczy-

wistą, że zbiór modeli zależy od systemu, według którego się w danej szkole uczy (np. od zaprowadzonego podręcznika). Jeżeli więc to lub owo twierdzenie zostaje w danej szkole zastąpione przez inne, to i model należy do niego dostosować.

1) Modele ze stereometrji.

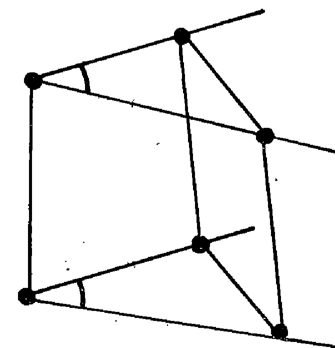
Jeżeli pęk płaszczyzn przetniemy płaszczyzną, równoległą do osi pęku, to w przecięciu otrzymamy proste równoległe.



Rys. 1.

Płaszczyzna, zawierająca dwie proste przecinające się, równoległe do drugiej płaszczyzny, jest do niej równoległa.

Dwie równoległe płaszczyzny przecinają trzecią płaszczyznę w krawędziach równoległych.

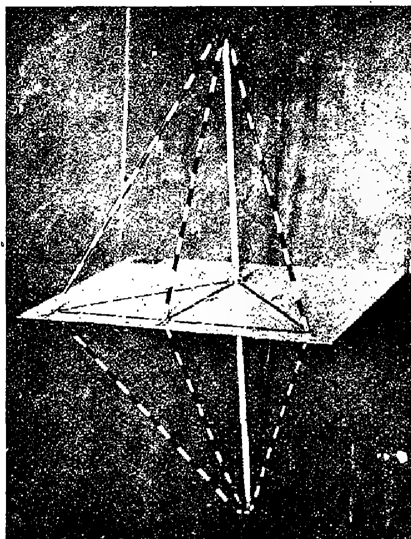


Rys. 2.

Kąty, których ramiona są zgodnie równoległe, są równe.

Prosta, prostopadła do dwu przecinających się prostych, jest

prostopadła do wszystkich prostych płaszczyzny, wyznaczonej przez owe dwie proste.



Rys. 3.

Uwaga: pręty są dwubarwne, aby były i zdaleka widoczne.

Proste prostopadłe do tej samej płaszczyzny, są do siebie równoległe.

Płaszczyzna przesunięta przez prostą, prostopadłą do drugiej płaszczyzny, jest też prostopadła do tej płaszczyzny.

Model uwydatniający kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.

Model uwydatniający kąt nachylenia dwu płaszczyzn.

(Deseczki spojone zawiasami dla umożliwienia zmieniania kąta nachylenia).

Prostopadłościan, równoległościan z drutu z przekątniami.

Ostrosłupy (całe i ścięte) z drutu z „wysokością", przekrojami i t. d.

Pięć brył foremnych (Platona), najlepiej z drutu.

2. G e o m e t r j a   w y k r e ś l n a.

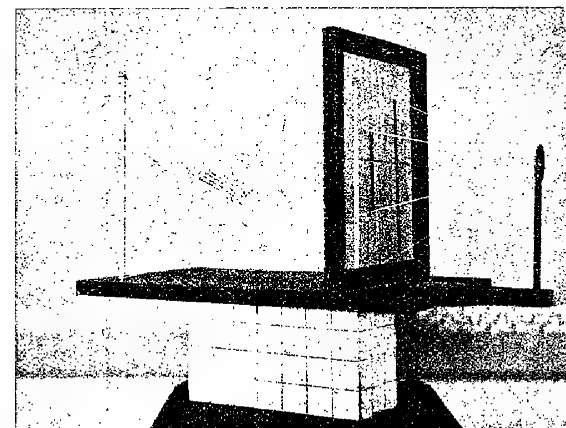
Model, uwydatniający rzut równoległy odcinka na płaszczyznę.

Szczególny przypadek: odcinek jest prostopadły do płaszczyzny rzutów.

Model, uwydatniający „zniekształcenie" kąta przy rzucie równoległym.

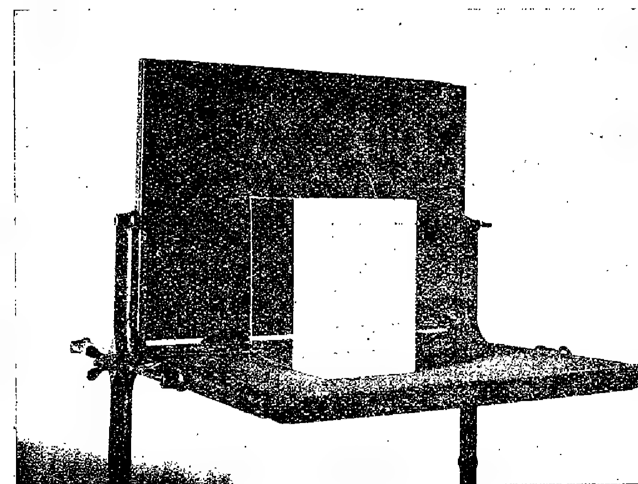
Model, uwydatniający rzut kąta prostego, którego jedno ramię jest równoległe do płaszczyzny rzutów.

Model, uwydatniający rzut „środkowy".



Rys. 4.

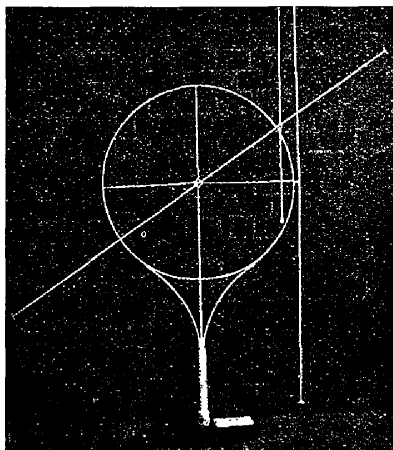
Uniwersalny przyrząd, przedstawiający rzutnie (poziomą i pionową) *ruchome* około osi.



Rys. 5.

3. Trygonometrja.

Model dla wykazania zmienności funkcyj trygonometrycznych.



Rys. 6.

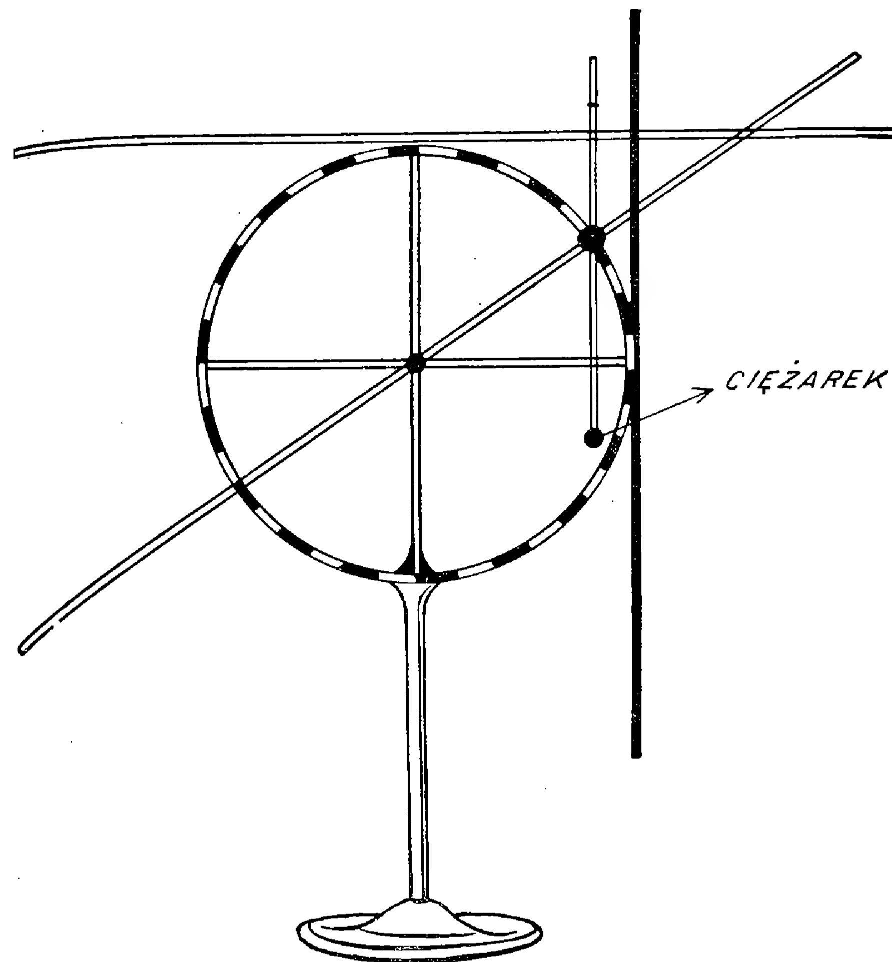
Porównaj też model, umieszczony w dziele: W. Lietzmann, Methodik des math. Unterrichts. Tom II, str. 176, w wydaniu z r. 1923-go.

Od urządzenia skrzynki z przyborami do „improwizowania" modeli, oraz od zaopatrzenia się w zbiór modeli „demonstracyjnych" powinna każda szkoła rozpocząć. Modele „uczniowskie", które należy wzorować na „demonstracyjnych", można na czas późniejszy przeznaczyć.

Stereometrja wymaga całego szeregu modeli. Nie podajemy rysunków wszystkich tych modeli, aby nie krępować pomysłowości poszczególnych nauczycieli. Na tej drodze dojść możemy do najdoskonalszych okazów, które po pewnym czasie sfotografujemy i podamy do powszechnej wiadomości.

Na całkowite urządzenie zbiorów, umieszczenie ich w szafach i objęcie katalogiem wystarczy jeden rok.

W następnych dopiero latach będzie można przystąpić do stworzenia jednolitego systemu modeli. System ten będzie wy-



Rys. 7.

tworem zbiorów, indywidualnie przez nauczycieli założonych, a zawartych w ramach powyższych wskazówek.

Uwaga: Fotografje (Ryc. 3, 4, 5, 6) nadesłali: p. dyr. A. Wantuch w Poznaniu i p. prof. Barger w Bielsku.

WSKAZÓWKI BIBLJOGRAFICZNE.

Spis niniejszy zawiera więcej książek, niż przeciętna bibljoteka szkolna może jednorazowo nabyć, celem jego jest bowiem ułatwienie nauczycielowi wyboru.

Spis obejmuje tylko książki bezpośrednio wiążące się z praktyką szkolną, pominięto natomiast podręczniki i monografje z zakresu matematyki wyższej.

Dzieła, objęte spisem, zostały podzielone na następujące grupy:

I. Dzieła, dotyczące podstaw matematyki elementarnej.
II. Wydania klasyków i dzieła z zakresu historji matematyki.
III. Metodyki.
IV. Typowe podręczniki i zbiory zadań, przeważnie w językach obcych.
V. Monografje popularne, mogące dostarczyć materjału do urozmaicenia wykładu lub pracy w kółkach uczniowskich.
VI. Czasopisma.

Gwiazdką oznaczono książki i pisma, które może czytać uczeń.

I.

Dzieła, któreby obejmowało całość matematyki elementarnej z punktu widzenia nauki nowoczesnej i z uwzględnieniem potrzeb szkoły, niema dotąd w żadnym języku. Najbardziej do tego zbliżona jest włoska, wychodząca w Medjolanie u Hoepli'ego:

1. *Enciclopedia delle matematiche elementari 1930 — 32* (dotąd t. I w dwóch częściach, obejmujący logikę, arytmetykę i algebrę); zł. 73.—. Ponadto istnieją

2. Weber-Wellstein. *Enzyklopädie d. Elementarmathematik.* Teubner. Leipzig, 1922—24. Zł. 160.—.
I Bd. Elementare Algebra u. Analysis 18 M.
II Bd. Elementare Geometrie 19 M.
III Bd. Angewandte Elementar-Mathematik 39 M.

(Dzieło oświetla tylko *niektóre zasadnicze* zagadnienia matematyki elementarnej w I i II tomie; tom III zawiera bardzo ciekawe zagadnienia z matematyki stosowanej. Przed wojną istniał dobry rosyjski przekład Kahana).

3. Klein, Felix. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* III Aufl. 3 Bde. Zł. 89.—
I Bd. Arithmetik, Algebra, Analysis,
II Bd. Geometrie,
III Bd. Präzisions u. Approximationsmathematik. 1924—28.

(Wykład mniej systematyczny niż w encyklopedji Webera-Wellsteina, znacznie jednak ciekawszy i żywszy. Ujęcie poszczególnych zagadnień zawsze oryginalne, pobudzające do myślenia, choć nie zawsze przemyślał autor do końca konsekwencje metodyczne. Dla naszych stosunków szczególnie wartościowe są t. I i II, kosztujące razem 61 zł.; tom III nie wiąże się z naszą praktyką szkolną).

4. Killing u. Hovestadt. *Handbuch des mathematischen Unterrichts.* 2 Bd. Teubner. Leipzig, 1910—13. Zł. 65.—.

(Dzieło, wbrew swemu tytułowi, traktuje tylko o geometrji i trygonometrji. Autorowie starają się wyzyskać badania naukowe — krytykę podstaw — dla potrzeb szkoły. Rzecz godna poznania i przestudjowania, jakkolwiek związana bardzo ściśle z obcą nam tradycją szkolną niemiecką).

Z wyjątkiem Nr. 4 (Killing-Hovestadt) wszystkie powyżej wymienione książki traktują zagadnienia dydaktyczne bardzo ogólnikowo. Naturalne ich uzupełnienie pod tym względem stanowią dwa dzieła niemieckie:

5. Schwering. *Handbuch d. Elementarmathematik für Lehrer.* 1907. Zł. 28.50.

6. Fladt, K. *Elementarmathematik* (dotąd tylko Bd. I, Teil 2: Elementargeometrie (Planimetrie u. Stereometrie). Zł. 17.50.

Obie książki w pokrewnym duchu pisane, w obu chodzi o to samo — o przegląd faktycznie stosowanych w podręcznikach szkolnych, głównie w Niemczech, sposobów grupowania i oświetlania materjału naukowego. Praca, wychodząca pod red. Fladta (tom wyżej wspomniany opracował sam redaktor), zakrojona na znacznie szerszą skalę, ma obejmować 3 duże tomy w 10-ciu częściach. Liczyć się ma znacznie więcej z badaniami naukowemi, niż Schwering.

Należy jeszcze wymienić ciekawą próbę systematycznego oparcia geometrji elementarnej na teorji grup przekształceń.

7. Schwan. *Elementare Geometrie* I Bd. Die Ebene. Leipzig. 1929. Akad. Verlagsgesell. Zł. 36.

O podstawach geometrji traktują też dzieła następujące:

8. Schur, F. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner. Leipzig, 1909. Zł. 20.50.

9. Pasch-Dehn. *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Springer. Berlin, 1926. Zł. 32.90.

(Autorzy zajmują się podstawami geometrji, uwzględniając historję tych badań; dla nauczyciela szczególnie ważnym jest rozdział o mierzeniu utworów geometrycznych).

10. Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner. Berlin, 1930. Zł. 36.60.

(Książka ta stanowi epokę w badaniach nad podstawami geometrji. Na uwagę nauczyciela zasługuje przedewszystkiem rozdział III i IV).

Książkę, w której znajdzie czytelni geometrję rzutową i Euklidesową podaną w formie aksjomatycznej omal doskonałej jest:

11. Veblen, O., Young, J. W. *Projective Geometry* t. I i II. Ginn & Co, London, 1916—1917.

Francuzi nie posiadają encyklopedji matematyki elementarnej, mają natomiast szereg doskonałych podręczników dla t. zw. classes de mathématiques, a więc o poziomie wyższym od naszych podręczników szkolnych. Dla przykładu wymieniamy:

12. Hadamard, J. *Leçons de géométrie élémentaire*. 2 vol. A. Colin. Paris, 1932. Zł. 42.—. (Istnieje przekł. polski tomu I).

13. Bourlet, C. *Leçons d'algèbre élémentaire*. A. Colin. Paris, 1931. Zł. 23.—.

14. Tannery, J. *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*. A. Colin. Paris. Zł. 23.—

(Istnieje przekład polski Z. Czubalskiego obecnie wyczerpany — dostać można w antykwarniach — wydany przez kasę Mianowskiego).

Jeśli chodzi o trygonometrję, to Kasa Mianowskiego wydała w swoim czasie dwa dzieła — oba dziś wyczerpane — o różnym poziomie, nawzajem uzupełniające się.

15. Czajewicz, A. *Trygonometrja płaska i kulista*, 1891.

16. Hobson, E. *Trygonometrja płaska*, 1917.

W języku polskim mamy następujące dzieła, dotyczące podstaw poszczególnych działów matematyki:

17. Zaremba, St. *Zarys pierwszych zasad teorji liczb całkowitych*, 1907.

18. Wilkosz, W. *Arytmetyka liczb całkowitych*. System aksjomatyczny, 1932. Zł. 4.00.

(Książka zawiera liczne cenne uwagi natury logicznej).

19. Zaremba, St. *Arytmetyka teoretyczna*, 1912.

20. Zaremba, St. *Wstęp do analizy*, 1915 (zwłaszcza część I: Teorja dowodu matematycznego).

21. Enriques, F. *Zagadnienia dotyczące geometrji elementarnej;* przełożyli St. Kwietniewski i Wł. Wojtowicz, 2 tomy, 1914—17.

(Jest to, jak dotąd, najlepsze opracowanie podstawowych zagadnień geometrji z punktu widzenia potrzeb szkoły).

22. Pieri, M. *Geometrja elementarna oparta na pojęciu „punktu" i „kuli"*. Przełożył Stefan Kwietniewski. Warszawa, 1915.

(Włoski odpowiednik słynnych Grundlagen d. Geometrie Hilberta. Wykład Pieri'ego, zbudowany zresztą na innych pojęciach i pewnikach, przewyższa nieraz Hilberta pod względem jasności).

Budowę nowoczesnej aksjomatyki przedstawiają w sposób bardzo jasny i przystępny, zrozumiały nawet dla dojrzalszego ucznia, dwie książeczki:

*23. Young, John Wesley. *Dwanaście wykładów o zasadniczych pojęciach algebry i geometrji*. Przełożył Ludwik Silbersztein. Wende. Warszawa 1914.

*24. Huntington, E. *O podstawowych twierdzeniach algebry*. Przełożył W. Wojtowicz. Warszawa, 1913.

(Obie dziś wyczerpane; dostać można w handlu antykwarskim).

W najważniejsze zagadnienia filozofji i logiki wprowadza dzieło:

Kotarbiński. *Elementy teorji poznania, logiki formalnej i metodologji.* Str. VIII+483. Ossolineum, 1929.

Pragnącym poznać dokładniej zagadnienia logiki matematycznej polecić można przedewszystkiem:

26. Śleszyński, Jan. *Teorja dowodu.* 2 tomy. Kraków, 1925—89. Zł. 21.50.

(Każdy nauczyciel winienby znać dokładnie przynajmniej tom I, omawiający logikę tradycyjną, metody i błędy rozumowania i dowód zupełny. Tom II poświęcony właściwej logice matematycznej. Cena tomu I-go zł. 7.50).

Godne uwagi są skrypta, wydane przez Koło Mat. Fiz. Sł. U. Warsz.:

Łukasiewicz. *Elementy logiki matematycznej.* VIII+200, 1929.

Z dzieł obcych zasługuje przedewszystkiem na poznanie bardzo przystępnie opracowana książka, potrącająca tu i ówdzie o zagadnienia dydaktyczne:

27. Burali-Forti, C. *Logica matematica* II-ed. Hoepli. Milano. Zł. 5.

Logiką poznania matematycznego zajmują się:

28. Hölder, O. *Die mathematische Methode.* Springer, Berlin, 1924. Zł. 44.—.

(Książka zawiera mnóstwo ciekawych uwag krytycznych, zwłaszcza o logicyzowaniu matematyki. Ciekawe są też rozważania, dotyczące matematyki stosowanej).

Wręcz przeciwne stanowisko zajmuje piękna, jasna i przystępna praca:

29. Russell, Bertrand. *Introduction to mathematical philosophy.* Allen London, 1924. 14 sh.

Stanowiska intuicjonizmu broni piękna praca Weyla:

30. Weyl, H. *Das Kontinuum.* Leipzig, 1933. Cena zł. 5.

W pewnym związku z wymienionemi w tym dziale książkami pozostają:

31. Poincaré H. *Nauka i hipoteza,* 1908.

32. Poincaré H. *Wartość nauki,* 1911.

33. Poincaré H. *Nauka i metoda,* 1911.

(Autor zajmuje się zagadnieniami z zakresu filozofji matematyki. Tytuły w języku francuskim są: La Science et l'Hypothèse. La Valeur de la Science. Science et Méthode).

Wreszcie zwracamy uwagę na jedyne w swoim rodzaju dzieło:

34. *Poradnik dla samouków,* t. I — Matematyka i t. III. Wydawnictwo A. Heflicha i St. Michalskiego z zapomogi Kasy im. Dra J. Mianowskiego. 1915—1923.

(Zawiera obszerną bibljografję matematyki i szereg artykułów, z których dla nauczyciela szczególnie cenne mogą być artykuły J. Łukasiewicza, Z. Janiszewskiego i J. Sleszyńskiego).

II.

A.) Z klasyków matematyki najważniejszy jest dla nas Euklides, który powinien być dokładnie znany każdemu nauczycielowi. Z innych autorów byłyby pożądane poszczególne rozprawki, czasem nawet wystarczyłyby wyjątki z ich dzieł. Niestety, takiej „chrestomatji" matematycznej nie posiada żaden kraj.

W polskim języku mamy następujące przekłady:

*1. Euklidesa *Początki Jeometrji xiąg ośmioro przekładanie X. Józefa Czecha 1807* (było i późniejsze wydanie).

*2. Steiner, Jakób. *Konstrukcje geometryczne, wykonane zapomocą linji prostej i stałego koła.* Przełożył St. Kwietniewski, wyd. Kasy Mianowskiego.

W czasopiśmie „Wektor", które ukazywało się w Warszawie od 1911 do 1916 r., znaleźć można:

3. w tomie II:

*Archimedes. *O pomiarze koła.*

*Kartezjusz. *Teorja równań* (wyjątki z „Géométrie).

*Lagrange. J. *O zastosowaniu krzywych do rozwiązywania zadań.*

w tomie III:

*Leibniz. *Dowód tw. Fermata* (streszczenie).

*Laguerre. *Reguła znaków w geometrji.*

*Sylvester. *Paradoks d'Alemberta-Carnota.*

*Peano. *O określeniach matematycznych.*

*Pascal, B. *Rozprawa o trójkącie arytmetycznym.*

*Leibniz. *Dwa fragmenty dotyczące metody geometrji element.*

w tomie IV:

Steiner, J. *Łatwy dowód pewnego twierdzenia stereometrycznego Eulera.*

Z przekładów w jęz. obcych przytaczamy dwa, które dadzą się wyzyskać w szkole średniej:

4. A r c h i m è d e. *Oeuvres complètes trad. par P. v. Eecke.* Gauthier Villars, Paris, 1921. Zł. 42.

5. D i o p h a n t e d'A l é x a n d r i e. *Les six livres arithmétiques* trad par. P. v. Eecke, tamże, 33 zł.

Prócz tego, wobec trudności dostania Euklidesa w polskim przekładzie ks. Czecha, wymieniamy:

6. *The thirteen books of Euclid Elements translated by T. L. Heath.* 3 tomy. Cambridge. Univ. Press.

7. *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna.* Editi da F. Enriques. Zanichelli, Bologne, 1930.

(Oba te wydania zawierają obszerne i cenne komentarze, oświetlające zarówno historję geometrji elementarnej, jak i jej obecny stan. Wydanie włoskie, wzorowane na angielskim przekładzie Heatha, obejmuje w dwóch tomach księgi I—IX; tom trzeci ma się wkrótce ukazać).

Oprócz tego zwracamy uwagę na wydawnictwo „Ostwalds Klassiker der exacten Wissenschaften", gdzie czytelnik znajdzie w przekładzie rozprawki Huyghensa i Bernoulli'ego, które częściowo mogłyby być przydatne w kółkach uczniowskich.

B.) Z zakresu historji matematyki mało mamy prac w języku polskim. Należy w każdym razie wymienić rozprawkę, wiążącą się blisko z tematami szkolnemi. Jest to:

8. Ś l e s z y ń s k i, J a n. *O pierwszych stadjach w rozwoju pojęć nieskończonościowych* (w tomie III „Poradnika dla Samoukow

Z pośród opracowań historji matematyki największe usługi mogą oddać nauczycielowi:

9. T r o p f k e. *Geschichte d. Element. Mathematik.*

10. C a n t o r. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* t. I, II, III, IV. Zł. 290.—.

11. L o r i a, G i n o. *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* Hoepli, Milano, 1914. (około zł. 8).

12. Z e u t h e n. *Geschichte d. Mathematik im 16 u. 18 Jahr.* Deut. Ausg. v. R. Meyer. Teubner. Leipzig, 1903. Zł. 38.—.

Dla kogo piękny wykład Lorii byłby niedość obszerny, sięgnąć może do najgruntowniejszej, jaka istnieje, historji greckiej matematyki:

13. H e a t h, T h. *A history of Greek mathematics.* 2 t., Oxford, 1921. 63 sh.

IV.

Z dzieł oryginalnych zasługują na poznanie przedewszystkiem:

1. Z a r z e c k i, L u c j a n. *Nauczanie matematyki.*

2. N i k o d y m, O t t o. *Dydaktyka matematyki czystej.* Lwów, 1930.

(Dotąd ukazał się t. I, obejmujący liczby naturalne. Cena tomu I — 16 zł.).

3. H o b o r s k i, A. *Trzy odczyty o nauczaniu matematyki w szkole średniej.* 1925. (I. O podstawach matematyki. II. Analiza matematyki gimnazjalnej ze stanowiska naukowego. III. Uwagi dydaktyczne). Zł. 1.80.

W językach obcych znaleźć można cenne rozprawy w fachowych czasopismach różnych krajów, systematyczne jednak i gruntowne opracowania istnieją przedewszystkiem w językach niemieckim i angielskim. Kto chciałby mieć dokładne pojęcie o spółczesnych prądach i zagadnieniach w dziedzinie metodyki matematyki, nie może poprzestać na dziełach jednego kraju, lecz musi poznać metodyki niemieckie, angielskie i amerykańskie. W każdym z tych trzech krajów myśl metodyczna idzie innemi drogami, a to z powodu różnych tradycyj lokalnych, a szczególnie z powodu różnicy warunków społecznych.

Nowożytne prądy i doświadczenia niemieckich szkół, zwłaszcza z okresu reformy Kleina, zestawia najlepiej:

4. L i e t z m a n n, W. *Methodik des mathematischen Unterrichts.* 3. Bd. II Aufl. Quelle-Meyer. Leipzig 1923—26. Zł. 83.50.

(Dzieło bardzo szczegółowe, często jednak rozwlekłe i mało oryginalne. W każdym razie, kto chce znać powojenną szkołę niemiecką, nie może pominąć Lietzmanna).

5. S i m o n, M a x. *Methodik u. Didaktik d. Rechnens und der Mathematik,* 1908. Zł. 14.—.

6. B r a n d e n b e r g e r, K o n r a d. *Didaktik d. mathematisch-naturwissensch. Unterrichts.* Zürich, 1920. Zł. 11.50.

(Simon wyzyskuje bardzo sumiennie całą dawniejszą literaturę niemiecką, pisze bardzo żywo, często z temperamentem polemisty. W każdym jego sądzie, w każdej radzie znać doświadczonego pedagoga, ale zarazem człowieka walki, stąd cała książka zabarwiona subjektywizmem. Książka Brandenbergera zawiera streszczenie jego wykładów na wydziale kształcenia nauczycieli politechniki w Zürichu. W sądach swoich zrównoważona, w wykładzie systematyczna, ujmuje nieraz rozmaite zagadnienia głębiej i trafniej niż Lietzmann).

7. Maennchen, Ph. *Methodik des mathematischen Unterrichts.* H. Diesterweg. Frankfurt a/M., 1928. Zł. 12.—.

Chcąc mieć pojęcie o prądach, nurtujących obecnie szkołę niemiecką, trzeba przestudjować:

8. Gurski, Streicher, Disse, Küchemann: *Die Durchführung des Arbeitsschulprinzips im mathem. Unterricht.* Teubner. Leipzig, 1931. Zł. 15.50.

9. Rose, Gustav. *D. Schulung des Geistes durch d. Mathematik u. Rechenunterricht.* 1928. Zł. 14.50.

Jeśli idzie o szkołę angielską, najciekawsze są dwie metodyki:

10. Nunn, T. P. *The teaching of algebra.* Longmanns Green. London, 1914, 7½ sh.

11. Godfrey, a. Siddons. *The teaching of elementary mathematics.* Cambridge, 1931. 6½ sh.

Bardzo typowe dla kierunku amerykańskiego, doskonale zestawiające wyniki badań doświadczalno-pedagogicznych są dwie książki, opracowane pod red. Thorndike'a i noszące jego firmę:

12. Thorndike, E. *The psychology of arithmetic.* Macmillan, 1929. Zł. 20.50.

13. Thorndike, E. *The psychology of algebra,* Macmillan, 1928. Zł. 24.00.

(Liczba uczniów w szkołach średnich St. Zjednoczonych wzrosła z 240.000 w 1890 r. do 1.800.000 w 1920 r. Gimnazja (high schools) zostały przepełnione elementem źle przygotowanym, niedokładnie selekcjonowanym; liczebność klas wzrosła nadmiernie. Jak widzimy, Ameryka walczy z temi samemi trudnościami, które nas czekają za 3—4 lata, po wprowadzeniu reformy szkolnej. Dlatego metodyki i dydaktyki amerykańskie, mimo całą ich jednostronność, mogą nam dać więcej może materjału do rozmyślań i wskazówek do badań, niż jakiekolwiek inne).

IV.

Podręczniki używane dziś w szkołach może bibljoteka dostać darmo od wydawców, którzy chętnie je ofiarują jako okazowe egz. Chodziłoby tedy: a) o podręczniki dawniejsze, które nie utraciły wartości; b) o podręczniki w językach obcych.

a) Z podręczników dawnych pomijamy te, które mogłyby interesować co najwyżej historyka szkolnictwa. Śród tych, które dla nauczyciela mogą i dziś być wartościowe, najważniejsze może są:

1. Badowski, J. *Geometrja elementarna.*

(Pod różnemi względami lepsze, bardziej konsekwentne jest wydanie I-sze, które ukazało się w 1894 r. nakładem Kasy Mianowskiego, warto jednak posiadać w bibljotece również wydanie II-gie. Wydanie I-sze wzorowane na włoskim podręczniku Faifofera; wydanie II-gie zawiera ciekawą, choć trochę mechaniczną, niekonsekwentną próbę połączenia w wykładzie planimetrji ze stereometrją).

2. Baraniecki, M. *Arytmetyka.* Wydanie Kasy Mianowskiego.

(Książka Barannieckiego nie była nigdy podręcznikiem szkolnym — napisał ją autor z myślą o potrzebach nauczyciela).

*3. Petersen, Jul. *Metody i teorje rozwiązywania zadań geometrycznych konstrukcyjnych.* Przetłumaczył K. Hertz, 1881.

(Książeczka klasyczna, która nic nie straciła na wartości; wszystkie metodyki i zbiory zadań konstrukcyjnych francuskie, niemieckie i rosyjskie opierały się na Petersenie).

Podamy jeszcze jedną książkę, która wprawdzie nie może być zaliczana do podręczników dawniejszych, ale zasługuje na polecenie ze względu na rozdziały: V Funkcja i VI Równania i nierówności narzucone 1-go stopnia. Po raz pierwszy bowiem, o ile nam wiadomo, zastosowano w niej metodę „analizy starożytnych" do rozwiązywania równań.

4. Gutkowski T., Wilkosz W. *Algebra elementarna z licznemi ćwiczeniami,* 1923, wyd. 5-te, cz. I.

b) Podręczniki obce najwłaściwiej będzie zgrupować według krajów, każdy bowiem kraj wytworzył inny typ nauczania.

I. Włosi celują ścisłością wykładu, zwłaszcza w podręcznikach przedwojennych. Typowe wymieniamy:

5. E n r i q u e s e A m a l d i. *Elementi di geometria ad uso delle scuole secundarie superiori,* Bologna Zanichelli. Zł. 11.

(Istnieje przekład polski — można go dostać w antykwarniach: „Zasady geometrji elementarnej", 1915).

6. C a t a n i a, S. *Aritmetica razionale IV ed.* Catania, 1914.

7. C a t a n i a, S. *Trattato di Algebra elementare,* 2 vol. Catania, 1914.

(Autor, uczeń Peano, probuje zastosować zarówno układ pewników swego mistrza, jak również symbole logiki matematycznej do wykładu szkolnego).

Reforma Mussoliniego zredukowała znacznie liczbę godzin matematyki, która obecnie przechodzi w szkole włoskiej pewnego rodzaju kryzys. Dydaktykom chodzi o to, by nie obniżyć poziomu tradycyjnego wiedzy matematycznej, co przy zmniejszonej liczbie godzin starają się osiągnąć przez pewne ograniczenie pierwiastka logicznego na rzecz intuicyjnego. Znalezienie w tym względzie drogi pośredniej jest naturalnie bardzo trudne, jeżeli wogóle da się osiągnąć. Z prób dotychczasowych może jest najciekawsza:

8. S e v e r i, F r. *Elementi di geometria.* Edizione ridotta. 2 vol. 1929. Zł. 12.50.

II. We Francji duch, w jakim prowadzi się nauczanie matematyki w szkole średniej, a przez to i metoda nauczania, mniejszym niż w innych krajach uległy zmianom od stu niemal lat. A więc np. w geometrji, zerwawszy zarówno z tradycją Euklidesa jak z empiryzmem, który tu i ówdzie przejawiał się w XVIII wieku, wahano się tylko od czasu do czasu między Legendre'a przepojeniem geometrji metodami rachunkowemi a umiarkowanym nawrotem do metod syntetycznych. Znamienne dla szkół francuskich jest to, że, gdy w połowie XIX wieku przeniknęła do szkół geometrja „nowożytna", stało się to w formie zbliżonej raczej do metody Chaslesa niż Steinera. W Anglji natomiast ten sam dział „nowożytnej" geometrji przybrał był postać zbliżoną do jakiegoś rozdziału geometrji Euklidesa.

Trzy bardzo cenne podręczniki francuskie wymieniono poprzednio (Nr. 8, 9, 10 w dziale I); tu jeszcze dodamy, jako typowy podręcznik dla poziomu niższego, mniej więcej odpowiadającego naszemu gimnazjum:

9. B o r e l et M o n t e l. *Algèbre,* classes de III, II et I. A. Colin. Paris, 1926. Zł. 7.60.

10. B o r e l, E. *Géometrie.* (Premier et second cycles). A. Colin. Paris, 1924. Zł. 7.50.

11. B o r e l, E. *Trigonométrie* (second cycle). A. Colin. Paris. 1925. Zł. 6.50.

W roku 1929 poczęły wychodzić ćwiczenia z geometrji (wraz z rozwiązaniami). Th. Caronneta. Do tej chwili ukazały się:

12. C a r o n n e t, T h. Livre. I. *Ligne droite.*
" " " II. *La circonférence.*
" " " III. *Figures semblables.*
" " " IV. *Les aires.*
" " " V. *Droites et plans.*
" " " VI. *Les polyèdres.*
" " " VII. *Corps ronds.* Vuibert.
Cena za I—VII zł. 27.20.

Warto poznać próbę istotnie naukową oparcia elementarnego wykładu geometrji na pojęciu ruchu, a więc w gruncie na teorji grup. Próbę tę uczynił znany matematyk Charles Méray w książce:

13. M é r a y, C h. *Nouveaux éléments de géométrie,* II éd. Dijon, 1906.

(Wykład niezmiernie ścisły przeprowadza systematyczną, doskonale pomyślaną fuzję planimetrji ze stereometrją. Wadą książki, która — obok nowatorstwa — utrudniała jej rozpowszechnienie się, jest dziwaczna terminologja).

14. F i t z - P a t r i c k et C h e v r e l. *Exercices d'arithmétique.* Herman. Paris. (Przeważnie zadania z arytm. teoretycznej).

15. F. G. M. *Exercices de géométrie.* Librairie Mame.

16. F. G. M. *Exercices de géométrie. descriptive.* Mame.

17. F. G. M. *Exercices d'algèbre.* Librairie Mame.

(Trzy ostatnie są pracą zbiorową; były używane w szkołach klasztornych. Znakomite są zadania geometryczne i wykreślne. Wszystkie zadania zaopatrzone w mniej lub więcej szczegółowe rozwiązania. Prócz tego każdy ze zbiorów F. G. M. posiada obszerny i gruntowny, ilustrowany mnóstwem przykładów, wstęp o metodach rozwiązywania zadań).

18. Lietzmann u. Zühlke. *Aufgabensammlung u. Leitfaden für Arithmetik, Algebra u. Analysis.* Teubner. Leipzig (dwa wydania: Ausgabe A. krótsze dla gimn. human. i wydanie B. obszerniejsze dla szkół realnych. Obszerniejsze w 2 tomach kosztuje zł. 32, krótsze — zł. 24).

Książki Lietzmanna tak są ułożone, że nadają się do prowadzenia lekcji systemem „pracy pod kierunkiem nauczyciela". Za uzupełnienie Lietzmanna można uważać dwie książki:

19. Hauptmann. *Technische Aufgaben zur Mathematik.* Teubner, Leipzig, 1927, zł. 6.50.

20. Richter, Oswald. *Wirtschaftliches Rechnen,* II Aufl. Teubner. Leipzig, 1930. Zł. 6.50.

W zakresie geometrji analitycznej najciekawszy z podręczników o elementarnym wykładzie jest (pomijający elementy urojone i niewłaściwe):

21. Beck, H. *Element. Geometrie.* 2 Bd. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft, 1929. Zł. 28.00.

Z dawniejszych, przedwojennych podręczników geom. elementarnej warto poznać:

22. Henrici u. Treutlein. *Lehrbuch d. Elementar-Geometrie.* Teubner. Leipzig, 3 Bd.

(Autorowie starają się doprowadzić ucznia do zrozumienia przekształceń linjowych w geometrji).

III. Z nowszej literatury angielskiej zasługują na poznanie przedewszystkiem dwa podręczniki:

23. Durell. *Elementary Geometry.* G. B. M. London. $4\frac{1}{2}$ sh.

24. Durell. *A new algebra for schools, part I—II.* G. Bell, London. 6 sh.

Pozatem bibljoteka, któraby posiadała wymienioną poprzednio metodykę Nunna, powinna mieć również dwutomowy jego zbiór zadań, do którego metodyka jest obszernym komentarzem:

25. Nunn, T. P.: *Exercices in algebra,* part I—II, Longmanns Green, London, 10 sh.

IV. Podręczniki amerykańskie, mimo nadmiernego i czasem płytkiego utylitaryzmu, mają dla nas wartość niemałą, uwzględniają bowiem badania pedagogiki eksperymentalnej. Do najciekawszych należą:

26. Rugg-Clark. *Fundamentals of high-school mathematics.* World Book Co. Chicago.

27. Breslich, Ernst. *Senior mathematics.* Books I—III. Univer. Press. Chicago, 1930. Zł. 44.00.

V.

W literaturze polskiej należy zwrócić uwagę zwłaszcza na dwie książki:

*1. Yule, Udny. *Wstęp do teorji statystyki,* przeł. Z. Limanowski, Warszawa, 1921.

*2. Szumański, Teofil. *Zasady kartografji.* 1926. Zł. 8.40.

Pomocna może też być książka:

*3. Danielewicz, B. i Dickstein, S. *Arytmetyka polityczna.*

Dla kółek matematycznych młodzieży starszej nadają się:

Sierpiński, W. *Teorja liczb niewymiernych* (wstęp do analizy), 1928.

(Książka dla osób, zamierzających poświęcić się studjom matematycznym, a więc stosowna dla uczniów zdolniejszych i zamiłowanych do matematyki).

Sierpiński, W. *Wstęp do teorji mnogości i topologji.* 1930.

Ruziewicz, St., Żyliński, E. *Wstęp do matematyki.* 1927.

W literaturze obcej nieocenioną pomocą dla nauczyciela są tomiki „Mathematisch-physikalische Bibliothek", które wychodzą u Teubnera pod redakcją Lietzmanna. Cena pojedyńczego tomiku zł. 2.60.

Wymieniamy najciekawsze:

*4. Maennchen. *Geheimnisse der Rechenkünstler.*

*5. Lietzmann. *Der pythagoreische Lehrsatz.*

*6. Leman. *Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie.*

*7. Luckey. *Nomographie* (tomik podwójny).

*8. Witting. *Funktionen, Schaubilder u. Funktionentafeln.*

*9. Kerst. *Methoden zur Lösung der geometrischen Aufgaben.*

*10. Schütze. *Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung.*

*11. Herold. *Finanz-Mathematik.*

*12. Drenkhahn u. Schneider. *Wirtschaft u. Mathematik* [1]).

*13. Schips. *Mathematik u. Biologie.*

*14. Lampe. *Mathematik u. Sport.*

Z zakresu t. zw. „rozrywek matematycznych" mamy w języku polskim dwie godne uwagi prace:

*15. Jeleński, S. *Lilavâti.* Poznań, 1930. Zł. 8.00.

*16. Jeleński, S. *Śladami Pitagorasa.* Poznań, 1931.

W językach obcych istnieje niezmiernie bogata literatura „rozrywek". Oprócz klasycznej pracy czterotomowej Lucasa (E. Lucas, Récréations mathématiques) należy wymienić dwie książki, a to ze względu na metodę przedstawienia zagadnień:

17. Kowalewski, Gerh. v. *Alte u. neue mathematische Spiele.* Teubner. Leipzig.

18. Kraitchik. *La mathématique des jeux.* Vuibert, Paris. Cena zł. 40.00.

Przy prowadzeniu kółka matematycznego, jak również tam, gdzie chodzi o urozmaicenie lekcyj, doskonałe usługi odda:

*19. Rademacher, H. u. Toeplitz, O. *Von Zahlen u. Figuren.* Springer. Berlin, 1930. (2 wyd. 1933).

(Autorowie rozważają szereg ciekawych zadań, nieraz potrącających o zasadnicze kwestje w matematyce. Chodzi im o zilustrowanie typowych sposobów stawiania zagadnień i metod badania. Do zrozumienia książki wystarczy minimalny zasób wiedzy matematycznej (mniej więcej w zakresie klasy VI gimn.), natomiast potrzebna jest pewna dojrzałość umysłowa).

[1]) Przy sposobności należy przestrzec przed nieostrożnem stosowaniem wykresów w ekonomji. Stosując metody matematyki, „ekonomja czysta" stara się naśladować matematykę pod względem ścisłości, a więc ustalić dokładnie postulaty i pojęcia podstawowe. Jeżeli te postulaty pominiemy, damy fałszywy obraz nauki i dojdziemy do zupełnie mylnych wniosków, sprzecznych z doświadczeniem. Ten błąd popełniają popularyzatorzy. Należałoby tedy, aby nauczyciel, pragnący poruszać tematy ekonomiczne, przestudjował przynajmniej: *Bousquet* Cours d'économie pure. Paris, 1928, zł. 4.00.

VI.

Posiadamy obecnie czasopismo specjalnie poświęcone dydaktyce i metodyce matematyki:

„Parametr", prenumerata roczna zł. 15.00.

oraz pisemko dla uczniów:

**„Młody matematyk"*, prenum. roczna zł. 4.00.

Oba pisma ukazują się nakładem księgarni Św. Wojciecha w Poznaniu pod redakcją A. M. Rusieckiego.

Od czasu do czasu poruszane bywają zagadnienia metodyczne w czasopiśmie:

„Mathesis Polska", prenum. roczna zł. 20.00.

Z pism obcych najbardziej potrzebom naszym odpowiada:

Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht, wychodzące w Lipsku u Teubnera w ilości 8 zeszytów rocznie, prenumerata roczna zł. 43.00.

Pozatem możemy wymienić następujące czasopisma:

**L'éducation mathématique*, Paris, Vuibert, prenumer. roczna zł. 10.00; wychodzi w ilości 20 numerów rocznie, poczynając od 1-go października. Pismo, przeznaczone dla uczniów, zawiera przeważnie zadania z rozwiązaniami.

Periodico di matematica, wychodzi w Bolonji u Zanichelliego.

Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften. Prenumerata roczna zł. 25.00.

Journal de Mathématiques Elémentaires. Vuibert. Paris. Prenumerata roczna zł. 12.00. Wychodzi w ilości 20 numerów rocznie, poczynając od 1 października. Pismo zawiera zadania wraz z rozwiązaniami. Zadania są naogół trudniejsze, aniżeli w czasopiśmie l'Education mathématique.

ZAŁĄCZNIKI.

Uwaga. Redakcja „Poradnika" zamieszcza w załącznikach kilka artykułów, których tematy były przedmiotem rozważań Ogniska matematyki w Krakowie. Pierwszy z nich, dotyczący analizy starożytnych, był już publikowany w sprawozdaniu rocznem IV państw. gimnazjum w Krakowie; ze względu jednak na doniosłość tematu, który powinien być znany ogółowi nauczycielstwa, jak i ze względu na to, że następny artykuł tegoż autora wymaga znajomości analizy starożytnych, Redakcja zdecydowała się artykuł ten przedrukować.

JAN LEŚNIAK (Kraków).

ANALIZA STAROŻYTNYCH.

Referat wygłoszony na pierwszem posiedzeniu Ogniska matematycznego w Krakowie dnia 19. XII. 1931.

Mamy za zadanie rozwiązać równanie:

$$\frac{1}{x} + x^2 \overset{?}{=} 3x + \frac{1}{x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Spróbujmy rozwiązać równanie (1), posługując się metodą równań równoważnych.

Stosując twierdzenie o przenoszeniu wyrażeń (funkcyj), otrzymujemy równanie:

$$x^2 - 3x \overset{?}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x},$$

Zastępując wyrażenie $x^2 - 3x$ wyrażeniem równoważnem $(x - 3) . x$ i redukując $\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$, dostajemy równanie:

$$(x - 3) . x \overset{?}{=} 0,$$

które jest *równoważne,* jak się sądzi zazwyczaj, równaniu (1).

Łatwo zauważyć, że równanie:

$$(x - 3) . x \overset{?}{=} 0$$

posiada dwa i tylko dwa pierwiastki, a mianowicie: 3 i 0; wobec tego równanie (1) powinno posiadać dwa i tylko dwa pierwiastki: 3 i 0. Liczba 3 spełnia równanie (1), ale 0 nie

może być pierwiastkiem równania (1); *widocznie popełniliśmy błąd.* Nietrudno dostrzec, że nie wolno było zastąpić wyrażenia $\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ zerem tak, jak to uczyniliśmy.

Posługując się metodą równań równoważnych, niejednokrotnie zmuszeni jesteśmy zastępować pewne wyrażenia (funkcje) wyrażeniami (funkcjami) równoważnemi. W każdym takim wypadku musimy zwracać uwagę na pola (obszary określoności) wyrażeń, a badanie pól staje się często rzeczą wielce kłopotliwą. Nie można przeto się dziwić, że pojawiły się usiłowania, aby ominąć wspomnianą trudność, jaką napotykamy przy rozwiązywaniu równań. Wielką zasługę położył tutaj Prof. U. J. Dr. W. Wilkosz, gdyż, o ile mi wiadomo, pierwszy starał się w sposób systematyczny wprowadzić do szkoły średniej inną metodę, służącą do rozwiązywania równań, a sprawniejszą od metody równoważnościowej.

Weźmy jeszcze raz pod uwagę równanie (1):

$$\frac{1}{x} + x^2 \overset{?}{=} 3x + \frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

i postawmy hipotezę, że równanie (1) posiada pierwiastki (jeden lub więcej). Oznaczmy dowolny z istniejących pierwiastków literą a. Podstawiając w miejsce x w równaniu (1) liczbę a, otrzymujemy *równość* (a nie równanie):

$$\frac{1}{a} + a^2 = 3a + \frac{1}{a}.$$

Stosując znane twierdzenia do ostatniej równości, otrzymujemy:

$$(a - 3) \cdot a = 0\ ^{1)}.$$

Stąd $a = 3$ lub $a = 0$.

Rezultat dotychczasowego rozumowania opiewa zatem: jeżeli równanie (1) posiada pierwiastki, to pierwiastkami *mogą być* jedynie liczby 3 i 0 (żadne inne liczby!). Czy liczby 3 i 0 są pierwiastkami równania (1), możemy się przekonać o tem

[1]) $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$, ponieważ z hipotezy wynika, że $\frac{1}{a}$ musi posiadać sens i być liczbą.

w ten sposób, że wstawimy kolejno 3 i 0 w równanie (1) i zbadamy, czy równanie (1) przejdzie w zdanie prawdziwe. Podstawiając 3 w równanie (1), otrzymujemy zdanie prawdziwe, natomiast podstawiając 0, nie otrzymujemy zdania prawdziwego. Wobec tego liczba 3 jest, liczba 0 nie jest pierwiastkiem równania (1).

Metoda rozumowania, którą powyżej zastosowaliśmy, nosi nazwę analizy, inaczej analizy geometrycznej, lub jeszcze inaczej analizy starożytnych *(analysis antiquorum).*

Jakkolwiek terminologja posiada w matematyce znaczenie drugorzędne, to jednak, zdaniem mojem, najwłaściwszą nazwą byłaby nazwa „analiza starożytnych". Termin „analiza" posiada bowiem w obecnym stanie nauki inne znaczenie w matematyce, a mianowicie oznacza pewną gałąź matematyki, nazywaną inaczej rachunkiem różniczkowym i całkowym. Nie wydaje mi się również właściwem, by ową metodę rozumowania nazywać analizą geometryczną, a to z tego powodu, że posługujemy się nią nietylko wyłącznie w geometrji, ale także w algebrze, jak to widzieliśmy przy rozwiązywaniu równania o jednej niewiadomej. Ponieważ historycy matematyki przypisują wynalezienie owej metody szkole platońskiej czy nawet samemu Platonowi, wobec tego nazwa „analiza starożytnych" zdaje się być odpowiednią.

Gdy chodzi o literaturę dotyczącą analizy starożytnych, to jest ona wcale obszerna, i tak:

1) J. Sleszyński: *Teorja dowodu.* T. I. (rozdział X).
2) S. Dickstein: *Pojęcia i metody matematyki.* T. I.

Z obcych książek:

3) H. Hankel: *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter.*
4) M. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* T. I.
5) O. Hölder: *Die mathematische Methode.*
6) J. M. C. Duhamel: *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.*

Krótkie wzmianki możemy znaleźć również w podręcznikach szkolnych, i tak w geometrji elementarnej A. Łomnickiego znajdujemy paragraf pod tytułem: „Wyjaśnienie analizy geometrycznej"; w geometrji W. Wojtowicza omawia autor w § 154

analizę geometryczną. I w innych podręcznikach geometrji znajdujemy wzmianki w rozdziałach dotyczących konstrukcyj. W podręcznikach szkolnych arytmetyki i algebry, poza jednym, a mianowicie poza *Algebrą elementarną* T. Gutkowskiego i W. Wilkosza, nie spotkałem się z rozważaniem tej metody przez autorów.

Przechodząc do szczegółów historycznych, przypomnę, że wynalezienie metody analizy starożytnych przypisujemy za Cantorem samemu Platonowi. Znane są bowiem zapiski Diogenesa Laërtiusa i Proklusa, którzy zgodnie stwierdzają, że Platon wynalazł nową metodę rozumowania, bardzo przydatną dla rozumowań geometrycznych, i podał ją do wiadomości Leodamasowi z Tasos. Szkoła platońska, zajmując się problemami matematycznemi, nie miała na względzie wyłącznie teoretycznych rozważań, ale także i praktyczne. Platon bowiem głosił zasadę, że ten człowiek, który zna matematykę, okazuje się zdolnym do prędkiego pojęcia i głębokiego zrozumienia innych nauk. Oczywiście chodziło mu nietyle o wiadomości materjalne z zakresu matematyki, jak o formalne, to jest o wyćwiczenie w rozumowaniu. W tym duchu interpretują historycy powiedzenie Platona: „Niech nikt, kto nie zna geometrji, nie wchodzi pod mój dach". Autorytetowi Platona, zdaniem Hankela, zawdzięczamy fakt, że matematyka we wszystkich niemal szkołach stanowiła i stanowi osobny przedmiot nauczania.

Użyłem zwrotu, że wynalezienie analizy starożytnych przypisuje się Platonowi, jednak, jak Hankel powiada, słowa „wynalazł" nie powinno się brać w dosłownem znaczeniu. Platon pierwszy zwrócił uwagę na metodę analizy starożytnych, wyodrębnił ją z pośród innych znanych sposobów rozumowania, i w tem znaczeniu mówimy o Platonie jako o wynalazcy analizy starożytnych.

Znaną była analiza starożytnych Euklidesowi, który charakteryzuje ją w ten sposób: „w analizie rzecz szukana uzasadnia się zapomocą kolejnych wniosków prowadzących do prawdy uznanej". Określenie analizy starożytnych Euklidesa nie jest, jak widzimy, dostatecznie jasne.

Zdajmy sobie sprawę z analizy starożytnych z punktu widzenia naukowego. Analiza starożytnych znajduje zastosowanie przy dowodzie prawdziwości zdań warunkowych (twierdzeń) i przy rozwiązywaniu problemów geometrycznych i algebraicznych.

Jeżeli mamy udowodnić prawdziwość pewnego zdania warunkowego, to sprawa ogranicza się do wykluczenia ewentualności, by poprzednik był zdaniem prawdziwem, a następnik fałszywem, albo innemi słowy do uzasadnienia, że z prawdziwego poprzednika wynika prawdziwy następnik. Posługując się analizą starożytnych, wyciągamy wnioski z następnika, o którym nie wiemy, czy jest zdaniem prawdziwem czy fałszywem. Jeżeli natrafimy na wniosek, o którym wiemy, że jest prawdziwy, to nic narazie nie możemy powiedzieć o prawdziwości czy fałszywości następnika. Starajmy się jednak rozumowanie odwrócić (wychodząc z wniosku, o którym wiemy, iż jest prawdziwy). O ileby nam się odwrócenie powiodło, to mamy tem samem dowód naszego twierdzenia. Wyżej wskazany sposób rozumowania nazywamy analizą starożytnych w zastosowaniu do dowodzenia twierdzeń. Takie odwracanie niezawsze musi się nam udać; oczywiście analiza starożytnych może znaleźć zastosowanie w tych tylko przypadkach, kiedy odwrócenie daje się uskutecznić. Jeżeli natomiast zaszłaby ta ewentualność, że, wychodząc z następnika, otrzymamy zdanie fałszywe, to nasze twierdzenie jest fałszywe i tu wkraczamy w inną metodę rozumowania, zwaną *reductio ad absurdum*, silnie związaną z analizą starożytnych [2]).

Uprzytomnijmy sobie, jaką zasadniczą zaletę posiada metoda analizy starożytnych. Otóż zyskujemy w niej punkt wyjścia, punkt zaczepienia przy dowodzie rozważanego twierdzenia, co jest rzeczą niejednokrotnie bardzo trudną, a tak ważną we wszelkich rozumowaniach dedukcyjnych.

O wiele większe znaczenie dla celów szkoły średniej posiada analiza starożytnych przy rozwiązywaniu problemów geometrycznych, wskazuje bowiem metodyczną drogę prowadzącą do rozwiązania. Jeżeli mamy za zadanie z pewnych danych skonstruować figurę, czyniąc zadość pewnym warunkom, to postępujemy w ten sposób: założenia i związki między elementami danemi a szukanemi przekształcamy tak, że figura rozpada się na kilka części składowych, których konstrukcja jest nam poprzednio znana. Aby jednak taka transformacja była możliwa, musimy hipotetycznie

---

[2]) Zobacz: *Parametr* T. II. zeszyt 4—5. A. H o b o r s k i. *Dowód niewprost, a szkoła średnia.*

założyć, że szukana figura jest już znaleziona, że wogóle istnieje. Wkraczamy najwyraźniej na drogę rozumowania analizy starożytnych.

Jeżeli chodzi o rozwiązywanie równań, układów równań, czy też nierówności narzuconych (funkcyjnych), to zadanie nasze polega na wyznaczeniu wszystkich takich elementów, które spełniają pewien warunek zdaniowy (funkcję propozycjonalną) φ, to znaczy po wstawieniu obracają warunek zdaniowy φ w zdanie prawdziwe.

Oznaczmy szukany zbiór elementów przez A. Postępując według analizy starożytnych:

I. Stawiamy hipotezę, że istnieją elementy spełniające warunek φ. Niech „z" będzie jednym z elementów spełniających φ, co zapisujemy w sposób następujący: $\varphi(z)$.

II. Ze zdania $\varphi(z)$ wyciągamy łańcuch wniosków:

$$\varphi(z) \supset \varphi_1(z)$$ [3])

$$\varphi_1(z) \supset \varphi_2(z)$$

— — — — — —

— — — — — —

— — — — — —

$$\varphi_n(z) \supset \psi(z).$$

Może się zdarzyć, że z tego, iż zachodzi $\psi(z)$, wiemy już, jakim jest element z. Wobec tego potrafimy wyznaczyć ogół wszystkich takich elementów, które spełniają warunek ψ; oznaczmy ten zbiór przez B. Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że zbiór A zawiera się w zbiorze B.

III. Odrzucamy (przez zwykłe podstawienie poszczególnych elementów w warunek zdaniowy φ) elementy, należące do zbioru B (to znaczy spełniające warunek ψ), a nie należące do zbioru A (t. zn. nie spełniające warunku φ).

Rozwiązaniem zagadnienia są więc te i tylko te elementy zbioru B, które spełniły φ. Zysk całego rozumowania leży więc w tem, że odpada konieczność podstawiania we φ wszystkich możliwych elementów z pola, a podstawiamy wyłącznie elementy ze zbioru B (często nawet identycznego ze zbiorem A).

Nie będę w tej chwili bliżej i szczegółowiej objaśniał zastosowania analizy starożytnych do rozwiązywania zadań geome-

[3]) Symbol $\supset$ jest znakiem wynikania.

trycznych czy też algebraicznych, gdyż te zagadnienia będą przedmiotem lekcyj szkolnych, które zobaczymy [4]).

Wspomnę, że analiza starożytnych znajduje również zastosowanie w matematyce wyższej. Przykłady można znaleźć w książce: O. Hölder, *Die mathematische Methode*, którą wyżej cytowałem.

Zamiarem moim było zwrócić uwagę na tę metodę rozumowania zwłaszcza, że nie wyobrażam sobie naukowo poprawnego rozwiązywania układów równań w szkole średniej bez korzystania z tej metody. Operowanie bowiem równoważnościami, jakkolwiek teoretycznie możliwe, to jednak praktycznie z powodu małej ilości czasu jest na terenie szkolnym, mojem zdaniem, omal nie do przeprowadzenia. Nadto jestem przekonany, że metoda analizy starożytnych nie będzie przedstawiała trudności dla uczniów, skoro należycie przygotujemy sobie grunt na drodze intuicyjnej. Nie należy jednak z tego, co powiedziałem, wysnuć wniosku, że wogóle nic nie powinno się mówić w szkole średniej o metodzie równoważnościowej.

Kończąc nadmienię, że Duhamel używa nazwy „analiza" w innem znaczeniu, aniżeli podałem, a mianowicie w znaczeniu redukcji. Jakkolwiek redukcja znajduje zastosowanie w nauce matematyki szkolnej, np. w teorji granic, to jednak ta sprawa nie wchodzi w nasze dzisiejsze rozważania.

PROTOKÓŁ Z LEKCJI POKAZOWEJ,

przeprowadzonej w kl. Va gimn. IV. w Krakowie dnia 19. XII. 1931.

Nauczyciel. Co nazywamy równaniem o dwóch niewiadomych x, y?

Uczeń. Równaniem o dwóch niewiadomych x, y nazywamy pytanie postaci: $f(x, y) \overset{?}{=} g(x, y)$, [5]) gdzie f i g są funkcjami dwóch zmiennych.

N. A co to jest funkcja dwóch zmiennych?

[4]) Jedna z tych lekcyj została przedstawiona poniżej.

[5]) Czyta się: $f(x, y)$ kiedy równe $g(x, y)$? Ma to oznaczać w skróceniu: dla jakich par liczbowych podstawionych za (x, y) jednocześnie w f i g, otrzymane liczby są sobie równe?

U. Funkcja dwóch zmiennych jest to przepis (sposób postępowania) tego rodzaju, że każdej parze liczb ze zbioru, zwanego polem funkcji, jest na mocy tego przepisu przyporządkowana jedna ściśle określona liczba.

N. Cośmy robili na ostatnich lekcjach z równaniami o dwóch niewiadomych?

U. Kreśliliśmy obrazy tych równań.

N. Napiszmy wyrażenie:

$$x - y \overset{?}{=} -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Czy wyrażenie (1) możemy uważać za równanie o dwóch niewiadomych?

U. Tak, ponieważ wyrażenie $x - y$ możemy uważać za funkcję dwóch zmiennych o przepisie: od pierwszej liczby pary liczbowej odjąć drugą liczbę tejże pary; liczba — 1, w myśl zawartej umowy, może być również uważana za funkcję dwóch zmiennych o przepisie: każdej parze liczbowej przypisujemy liczbę — 1.

N. Jakie pola mają obie rozważane funkcje?

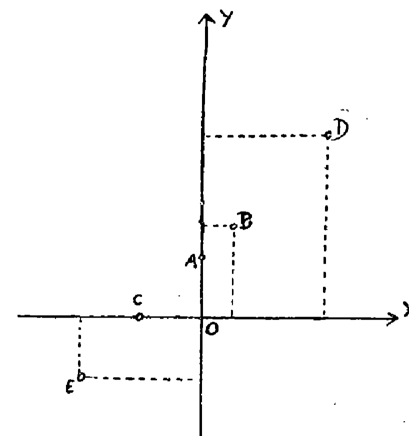
U. Ze względu na to, że pola nie były zgóry podane, obowiązuje umowa: polem jest zbiór wszystkich par liczbowych, do których da się zastosować przepis funkcyjny. Obie funkcje mają jako pola zbiory wszelkich możliwych par liczbowych.

N. Proszę nakreślić obraz równania (1).

U. Tworzę tabelkę o dwóch kolumnach. Liczby kolumny pierwszej będę oznaczał przez $\bar{x}$, kolumny drugiej przez $\bar{y}$. Liczby $\bar{x}$ obieram dowolnie, $\bar{y}$ zaś dobieram tak, by para $(\bar{x}, \bar{y})$ spełniała nasze równanie.

$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
—1	0
2	3
—2	—1

Następnie kreślę układ współrzędnych Kartezjusza i naznaczam punkty A, B, C, D i E, które są obrazami par: $(0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $(-1, 0)$, $(2, 3)$ i $(-2, -1)$.



N. Cóż się stanie z naszem równaniem, jeżeli wstawimy w nie współrzędne punktu A?

U. Równanie w tym przypadku przejdzie w równość p r a w d z i w ą; podobnie będzie, jeślibyśmy wstawili w nasze równanie współrzędne innego nakreślonego punktu.

N. Jaki będzie obraz naszego równania?

U. Do obrazu na pewno należeć będą punkty A, B, C, D i E, ale nietylko te, ponieważ obrazem równania o dwóch niewiadomych jest zbiór wszystkich takich i tylko takich punktów, których współrzędne spełniają dane równanie. Nie mogąc nakreślić wszystkich takich punktów i uwzględniając tę okoliczność, że wszystkie dotychczas nakreślone punkty leżą na jednej prostej, przyjmiemy, że obrazem równania (1) będzie prosta wyznaczona przez punkty A i B.

N. Nakreślmy obraz innego równania:

$$2x + y \overset{?}{=} 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

w tym samym układzie współrzędnych.

U. Postępować będziemy podobnie jak poprzednio:

$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	4
—1	6
2	0
3	—2

A' (0, 4), B' (—1, 6), C' (2, 0) i D' (3, —2).

Punkty A', B', C' i D' leżą na jednej prostej, i znów przyjmiemy, że obrazem równania $2x + y \overset{?}{=} 4$, jest prosta wyznaczona przez punkty A' i B'.

N. Jak na rysunku widzimy, obrazy obu równań mają punkt wspólny M. Oznaczmy współrzędne punktu M przez x_M i y_M. Cóż się stanie z równaniem (1) po wstawieniu w nie pary (x_M, y_M)?

U. Równanie (1) przejdzie wtedy w równość prawdziwą.

N. A co otrzymamy, wstawiając współrzędne punktu M w równanie (2)?

U. Także równanie (2) stanie się zdaniem prawdziwem.

N. Czy mógłbyś odpowiedzieć na pytania następujące: czy oba równania mają wspólne pierwiastki [6]), i jeżeli mają, to ile?

U. Jeżeli nakreślone proste są rzeczywiście obrazami naszych równań, to oba równania mają jeden jedyny pierwiastek wspólny.

N. Masz słuszność. Ale czy nie możnaby się przekonać o tem inną drogą, bez uciekania się do obrazów równań?

U. Spróbujmy zastosować analizę starożytnych, może się nam uda rozwiązać zagadnienie.

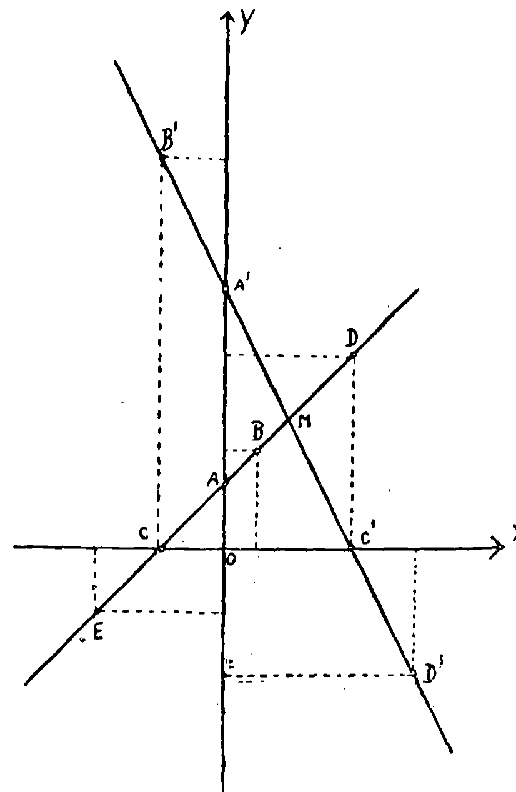
$x - y \overset{?}{=} -1$ . . . . (1).

i

[6]) Pierwiastkiem równania o dwóch niewiadomych nazywamy każdą parę liczbową, która wstawiona w równanie obraca je w zdanie prawdziwe.

$2x + y \overset{?}{=} 4$ . . . . (2)

Postawmy hipotezę: równania (1) i (2) mają wspólne pierwiastki (jeden albo więcej). . . . . (3).



Oznaczmy dowolny z istniejących pierwiastków przez (a, b). (4)

(4) i (1) $\longrightarrow a - b = -1$ . . . . (5)

(4) i (2) $\longrightarrow 2a + b = 4$ . . . . (6).

N. Aby wyrachować a i b dodajmy stronami równości (5) i (6).

U. (5) i (6) $\longrightarrow 3a = 3$ . . . . (7)

(7) $\longrightarrow a = 1$ . . . . (8)

(8) i (5) $\longrightarrow b = 2$ . . . . (9).

Na podstawie dotychczasowych rozważań mogę powiedzieć, że jeżeli oba równania mają wspólne pierwiastki, to mogą mieć tylko jeden, i tym pierwiastkiem jest para (1, 2).

N. Jak możemy się przekonać, czy oba równania mają wspólne pierwiastki, czy ich nie mają?

U. Sprawdźmy, to znaczy podstawmy parę (1, 2) w równania (1) i (2) i zbadajmy, czy oba równania przejdą w zdania prawdziwe. Otrzymujemy:

$1 - 2 = -1$ zdanie prawdziwe,
$2 + 2 = 4$ zdanie prawdziwe.

Zatem równania (1) i (2) mają jeden jedyny wspólny pierwiastek.

N. Jakie było zagadnienie?

U. Dane były dwa równania o dwóch niewiadomych. Należało odpowiedzieć na dwa pytania: czy oba równania mają wspólne pierwiastki i ewentualnie ile?

N. Odpowiedzieliśmy na postawione pytania, a nawet więcej, bo podaliśmy pierwiastek.

Z zagadnieniem tego rodzaju, jakie mieliśmy przed chwilą, będziemy się w najbliższej przyszłości często spotykali. Mając dane dwa równania o dwóch niewiadomych:

$$f(x, y) \stackrel{?}{=} g(x, y)$$

i

$$h(x, y) \stackrel{?}{=} k(x, y)$$

chodzić nam będzie o odpowiedź na następujące trzy pytania:

1) czy oba równania mają w s p ó l n e pierwiastki?
2) ile?
3) jakie?

Jaką metodę rozumowania zastosowaliśmy do rozwiązania takiego zagadnienia?

U. Metoda ta nosi nazwę analizy starożytnych.

N. Przy jakich zagadnieniach korzystaliśmy poprzednio z tej metody rozumowania?

U. Analizą starożytnych posługiwaliśmy się przy rozwiązywaniu jednego równania o jednej niewiadomej.

N. Czy znamy oprócz tej metody jeszcze inny sposób rozwiązywania równania o jednej niewiadomej?

U. Znamy metodę równań równoważnych.

N. A możeby tak dało się zastosować metodę równań równoważnych do naszego dzisiejszego zagadnienia?

U. Być może, ale poznane tam twierdzenia dotyczą równań o jednej niewiadomej, więc nie możemy ich tutaj stosować, ponieważ mamy do czynienia z równaniami o dwóch niewiadomych.

N. Całkiem słusznie. Czy, zdaniem twojem, dwa równania o dwóch niewiadomych muszą zawsze posiadać jeden jedyny wspólny pierwiastek?

U. Jestem przekonany, że nie zawsze. Gdyby bowiem obrazami obu równań były proste równoległe, to wtedy równania nie posiadałyby wogóle wspólnych pierwiastków.

N. Czy wobec tego można twierdzić, że dwa równania o dwóch niewiadomych albo mają jeden wspólny pierwiastek, albo wogóle nie posiadają wspólnych pierwiastków?

U. Sądzę, że i tego nie można twierdzić, gdyż mieliśmy przykłady, iż obrazami równań o dwóch niewiadomych były nietylko proste, ale linje krzywe, które mogą mieć np. dwa lub więcej punktów wspólnych.

JAN LEŚNIAK—ANDRZEJ TUROWICZ (Kraków).

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ O JEDNEJ NIEWIADOMEJ STOPNIA PIERWSZEGO NA NIŻSZYM STOPNIU NAUCZANIA.

Wydaje się nam rzeczą nie podlegającą dyskusji, że uprzystępnienie jakiegokolwiek zagadnienia naukowego winno być poprzedzone przez poprawne i ścisłe sformułowanie tego zagadnienia, oraz pojęć w niem zawartych. Wobec tego, zanim przystąpimy do omówienia metodyki rozwiązywania równań o jednej niewiadomej stopnia 1-go na niższym stopniu nauczania, postaramy się podać poprawną definicję równania i jego rozwiązania.

Definicja 1: Równaniem o jednej niewiadomej nazywamy funkcję propozycjonalną (logiczną) jednej zmiennej [1]) *$\varphi(x)$ taką, że istnieją funkcje liczbo-liczbowe jednej zmiennej* [2]) *f i g, przyczem* $\varphi(x) \overset{df}{=}$[3]) $f(x) = g(x)$.

Definicja 2: Rozwiązaniem równania o jednej niewiadomej nazywamy ogół wszystkich takich liczb, które po podstawieniu obracają równanie w zdanie prawdziwe.

Pomijamy w zupełności w niniejszym artykule kwestję opracowania metodycznego rozwiązywania równań 1-ego stopnia o jednej niewiadomej na wyższym stopniu nauczania, to zn.

[1]) Z pojęciem funkcji propozycjonalnej może się czytelnik zaznajomić w „*Teorji dowodu*" Prof. J. Sleszyńskiego.

[2]) T. zn. przypisujące (przyporządkowujące) liczbom liczby.

[3]) Symbol $\overset{df}{=}$ czytamy: oznacza z definicji.

w klasie V gimn. humanistycznego (według obecnie obowiązujących programów), a zajmiemy się wyłącznie sprawą nauczania o równaniach na niższym stopniu, t. j. w obecnej klasie III gimn.

Podamy dwie metody wychodzące z dwu zasadniczo różnych stanowisk. Różnica, jak zobaczymy, płynie stąd, iż podczas gdy jedna z metod kładzie nacisk na pojęcie zmiennej istotnej, to druga natomiast na pojęcie zmiennej pozornej. Nie będziemy usiłowali podać w ramach naszych rozważań poprawnej definicji zmiennej istotnej i pozornej [4]); ograniczymy się jedynie do podania przykładów, w których występują zmienne istotne i pozorne.

Weźmy pod uwagę następujące wyrażenia:

a) x jest podzielne przez liczbę 5.

b) $x + 1 = 4$.

c) $x > 10$.

W każdym z tych przykładów x jest zmienną istotną.

Zauważmy, że prawdziwość, czy też fałszywość zdania, które powstaje przez podstawienie szczególnej wartości za x, zależy od tego, jaką wybraliśmy wartość na x.

Rozważmy zkolei:

d) Jeżeli tylko x jest podzielne przez 4, to każde takie x jest podzielne przez 2.

e) $x + x = 2x$ dla każdej wartości na x.

f) $x^2 + 5 > 1$ dla każdej wartości na x.

g) Istnieje x takie, że $x + 1 = 4$.

W d), e), f), g) występuje x w charakterze zmiennej pozornej.

Zwróćmy uwagę, iż d), e) i f) są zdaniami (logicznemi) prawdziwemi. Zdanie g) jest również zdaniem prawdziwem, podczas gdy b) (podobne do niego zewnętrznie) nie jest wogóle zdaniem logicznem, lecz funkcją propozycjonalną, która przejdzie w zdanie logiczne (prawdziwe lub fałszywe) dopiero po podstawieniu.

Przystępujemy do podania obu metod tak, jak wyobrażamy je sobie w zastosowaniu szkolnem.

[4]) Zob. „*Teorja dowodu*".

Metoda I. Zasadniczą dla tej metody rzeczą jest wprowadzenie pojęcia liczby ogólnej.

Proponujemy określenie następujące: *Liczbą ogólną nazywamy liczbę schowaną w pudełku (albo obwiniętą w papier)*, którą oznaczać będziemy literami np. a, b..., gdyż nie potrafimy zapisać jej wartości cyframi.

Przechodzimy następnie do omówienia z uczniami głównych praw działań dodawania, odejmowania i t. d. Np. dla liczby ukrytej w pudełku czy zawiniętej za naszemi oczyma w papier, oznaczonej przez a, mamy:

$$a + 0 = a,$$

jakkolwiek nie wiemy, jaką jest liczba a. Zwróćmy uwagę na fakt, że, omawiając na tym stopniu nauczania prawo zerowego dodawania, poddajemy uczniom początkowo myśl, iż chodzi nam o pewną *jedną liczbę*, której nie potrafimy zapisać cyfrowo. Przy tem jednak przemycamy świadomie ogólne prawo brzmiące: jeżeli a jest *dowolną liczbą*, to $a + 0 = a$ (jakąkolwiek a miałoby wartość). W naszem szkolnem ujęciu a jest zmienną istotną, podczas gdy w rzeczywistości w twierdzeniu mamy do czynienia ze zmienną pozorną.

Po przerobieniu zasadniczych praw działań stawiamy następujący problem:

1) dano nam liczbę a (w pudełku) i

2) dano równość: $a - 1 = \frac{15}{7}$.

Mamy za zadanie, bez otwarcia pudełka, podać wartość a.

W razie udzielenia przez uczniów trafnej odpowiedzi przyjmujemy ją do wiadomości i dajemy inne zagadnienie tego typu, nieco trudniejsze. Jeżeli uczniowie nie podadzą natychmiast szukanej liczby, to rozumujemy następująco: $a - 1$ i $\frac{15}{7}$ są liczbami; dodajmy do jednej i do drugiej liczbę 1. Otrzymamy wtedy liczby $(a - 1) + 1$ i $\frac{15}{7} + 1$, które też są sobie równe.

Ale $(a - 1) + 1 = a$, zatem

$a = \frac{15}{7} + 1$, czyli otrzymujemy:

$a = \frac{22}{7}$, co sprawdzamy przez podstawienie.

Znaleźliśmy więc liczbę a, mimo że pudełko pozostało zamknięte.

Postępując w analogiczny sposób, przerabiamy przy rozwiązywaniu tego rodzaju zagadnień cały szereg twierdzeń dotyczących równości, np. twierdzenie o dodawaniu jednej i tej samej liczby do obu stron równości, mnożenie przez liczbę różną od zera i t. d., któremi posługujemy się przy rozwiązywaniu zadań rozważanego rodzaju.

Weźmy jeszcze przykład.

Wiemy, że:

1) a jest liczbą schowaną i

2) $a + 5 = 3$,

a pytamy się, jaką liczbą jest a.

Odejmując od liczb $a + 5$ i 3 liczbę 3, otrzymujemy:

$$a + 2 = 0.$$

Lecz $a + 2$ wynosi przynajmniej 2, więc nie może równać się zeru. Widać zatem, że wprowadzono nas w błąd, polegający na tem, iż albo w schowku nie było żadnej liczby, albo mylnie podano nam równość.

Zastanówmy się, o ile poruszone zagadnienia pokrywają się z problemem rozwiązywania równań o jednej niewiadomej. Na pierwszy rzut oka widać, że problemy nie są identyczne, gdyż w definicji równania była mowa o funkcjach liczbo-liczbowych, które w naszem ujęciu metodycznem wcale nie występują.

Jeżeli jednak do danego równania:

$$x - 1 = \frac{15}{7}$$

dołączymy założenie, iż istnieje liczba spełniająca je, i podstawimy ją w miejsce x w równanie, to otrzymamy nasz szkolny problem.

Postępowanie, zastosowane przez nas, pozostaje w ścisłym związku z jedną z metod rozwiązywania równań, a mianowicie analizą starożytnych, o której to metodzie może być mowa dopiero na wyższym stopniu nauczania.

Metoda II. Punktem wyjścia obecnie rozważanej metody jest zasada traktowania wyrażenia algebraicznego jako planu wykonywania działań, np. $3a + 1$ oznacza, że należy liczbę 3 pomnożyć przez jakąś liczbę i do otrzymanego iloczynu dodać liczbę 1. Tem samem uważamy a za miejsce puste, w które wolno nam wstawiać rozmaite liczby. Ilekroć mamy do czynienia z wyrażeniem algebraicznem, należy omówić z uczniami, czy przy każdem podstawieniu naznaczone działania będą wykonalne.

W twierdzeniu:

$$a + 2 = 2 + a$$

mamy na myśli nie równość dwóch liczb, lecz zgodność wyników naznaczonych działań, i to przy dowolnem podstawieniu. Nietrudno zauważyć, że kładziemy tutaj nacisk na pojęcie zmiennej pozornej.

Po zaznajomieniu uczniów z potrzebnemi twierdzeniami, które dotyczą przekształceń wyrażeń algebraicznych, dochodzimy do rozważania następującego pytania:

Jaką liczbę należy wstawić za x, aby po podstawieniu w $\frac{x-1}{3} = 2$ otrzymać zdanie prawdziwe?

O ile wszyscy uczniowie nie potrafią podać odrazu szukanej liczby, powiadamy im, że dla ułatwienia odgadnięcia dołączamy do naznaczonych w wyrażeniu $\frac{x-1}{3}$ działań jeszcze jedno, a mianowicie: mnożenie przez liczbę 3, i zapytamy, jaki wtedy powinniśmy otrzymać wynik.

Otrzymaną odpowiedź zapiszemy:

$$\frac{x-1}{3} \times 3 = 6.$$

Na podstawie jednego ze znanych uczniom twierdzeń wolno plan działań:

$$\frac{x-1}{3} \times 3$$

zastąpić przez:

$x - 1$, wobec czego

$x - 1 = 6$, a stąd otrzymujemy

$x = 7$, co sprawdzamy przez podstawienie. W ten sposób znaleźliśmy odpowiedź na postawione pytanie.

Zauważmy, że stosowanie tej metody wymaga, aby początkowo zajmować się tylko równaniami, których jedna strona jest liczbą szczególną. Po rozważeniu kilku takich przykładów przystępujemy do rozwiązywania równania, np.:

$$3x - 5 = x + 1.$$

Pytanie sformułujemy: jaką należy obrać wartość na x, aby działania wykonane według planów, znajdujących się po obu stronach równości, dały ten sam wynik?

Dla ułatwienia znalezienia szukanej liczby, będziemy dołączali do działań, znajdujących się po obu stronach znaku równości, działania: dodanie liczby 5, następnie odjęcie x, t. j. liczby szukanej. Otrzymujemy:

$3x = x + 6$, a dalej

$2x = 6$, stąd bezpośrednio mamy

$x = 3$.

Szukaną liczbą jest zatem liczba 3, co sprawdzamy przez podstawienie.

Zwróćmy jednak uwagę, że pokryjomu założyliśmy istnienie liczby spełniającej nasze równanie, i to już w tej chwili, gdy zmieniliśmy po raz pierwszy plan wykonywanych działań; postępowaliśmy bowiem tak, jak gdyby x było liczbą. W ten sposób wprowadziliśmy świadomie (choć bez wiedzy uczniów) zmienną istotną do naszych rozważań.

Zestawmy obecnie nasze zagadnienie z definicją równania. Widzimy, iż problemy pokrywają się, natomiast w rozwiązywaniu dopuściliśmy się pewnych przemilczeń (ze względów dydaktycznych).

Wydaje się nam rzeczą wskazaną, by jasno uświadomić sobie zalety obu metod. I tak zaletami metody pierwszej są następujące okoliczności:

1° Przyjmując opisany sposób postępowania nie uprzedzamy teorji równań, z którą zapoznajemy uczniów w klasach wyższych.

2° Z konieczności musimy wyćwiczyć uczniów w przekształcaniu równości, czem się w późniejszych latach nauki zazwyczaj nie zajmujemy.

3° Mamy przygotowany grunt do wprowadzenia metody analizy starożytnych w zastosowaniu do rozwiązywania równań.

Zaletami zaś metody drugiej są:

1⁰ Poprawna, choć nie sformułowana wyraźnie, definicja równania.

2⁰ Przygotowanie uczniów do nauki o funkcjach jednej zmiennej.

3⁰ Nawiązanie rozważanych problemów do znanych uczniom z poprzedniej nauki pytań typu:

$$? + 3 = 5.$$

W końcu wypada nam się zastanowić, którą z obu metod można stosować w szkole z większem powodzeniem. Odpowiedź trudna, a to z tego powodu, że z punktu widzenia metodycznego opracowania obie metody, jak wskazaliśmy, mają poważne zalety, a praktyka szkolna, wprawdzie dotychczas skromna, nie rozstrzygnęła definitywnie na korzyść jednej z nich. Prawdopodobnie powodzenie danej metody zależy od indywidualności uczącego i jego nawyków myślowych, dotyczących posługiwania się zmiennemi.

Celem naszym było pokazanie w niniejszym artykule, na jednym zresztą przykładzie, iż opracowanie metodyczne pewnego zagadnienia jest możliwe niejednokrotnie według kilku sposobów, a wybór metody pozostawiamy uznaniu czytelnika.

Dr. STANISŁAW GOŁĄB (Kraków).

O KONSTRUKCJACH GEOMETRYCZNYCH W SZKOLE ŚREDNIEJ.

Artykuł niniejszy nie dotyczy szczegółowej metodyki jakiegoś określonego rozdziału matematyki szkolnej. Posiadając charakter ogólniejszy może dać jednak asumpt do szczegółowego opracowania metodyki pewnych partyj materjału szkolnego. Mam na myśli kwestje związane z konstrukcjami geometrycznemi w szkolnem nauczaniu. Nie tak dawno jeszcze, jak konstrukcjom geometrycznym poświęcano w szkole średniej dużo czasu i uwagi. W latach późniejszych, gdy skrystalizowała się i przeważyła opinja, iż najgłówniejszym celem nauczania matematyki w szkole średniej jest zaprawienie uczniów w logicznie poprawnem myśleniu formalnem, wiele partyj materjału szkolnego doznało dotkliwego okrojenia. Los ten spotkał między innemi i konstrukcje geometryczne z wielką ogólną szkodą mimo, iż zgodzimy się na powyżej wysłowiony główny cel nauczania matematyki.

Zamierzam wykazać, że rozdział o konstrukcjach geometrycznych, jakkolwiek kładący duży nacisk na wyzyskiwanie wiadomości materjalnych i mający cele utylitarne na oku, *nie* jest pozbawiony licznych cech, stawiających go w roli narzędzia, kształcącego myślenie formalne. Przyłącza się tu ponadto inny czynnik o kolosalnem znaczeniu pedagogicznem. Mianowicie w rozdziale o konstrukcjach geometrycznych mamy wiele okazyj do nawiązania z innemi działami matematyki. Ta obfitość tych punktów łączności budzi zaciekawienie u uczniów i jest pozatem

z ogólnego stanowiska bardzo pouczającą, posiada zatem wielką rolę kształcącą.

W konstrukcjach geometrycznych mamy zagadnienia o różnym stopniu trudności, od najłatwiejszych aż do najtrudniejszych. Od takich, któremi można zająć ucznia w pierwszej klasie gimnazjalnej, aż do takich, które mogą być studjowane i zrozumiane dopiero na Uniwersytecie. Ta rozpiętość trudności zagadnień konstrukcyj geometrycznych jest jednak okolicznością nader pomyślną. Pozwala rozłożyć materjał na przestrzeni kilku lat, podając wiadomości dawkami nie za dużemi, czasem poprostu tylko „przy okazji".

Z konstrukcjami geometrycznemi spotykamy się w nauczaniu bardzo wcześnie, bo niechybnie już tam, gdzie uczniów zapoznajemy z najprostszemi przyrządami kreślarskiemi, t. j. liniałem i cyrklem. Zastanówmy się bowiem, jak najprościej sprecyzować cel i przedmiot konstrukcyj geometrycznych. Stajemy oczywiście na gruncie planimetrji, nie chcąc poruszać tutaj kwestyj związanych z geometrją wykreślną. *Zagadnienia konstrukcyjne polegają na tem, że mamy wykreślić zbiór punktów (figurę), czyniący zadość zgóry zadanym warunkom, przyczem jesteśmy ograniczeni do posługiwania się pewnemi zgóry określonemi przyrządami rysunkowemi, a więc np. lineałem albo cyrklem, albo lineałem i cyrklem.*

Widzimy tedy *po pierwsze*, że wykreślenie figury, czyniącej zadość zgóry zadanym warunkom, wymaga dania odpowiedzi na następujące pytania:

1) czy szukana figura, którą mamy skonstruować, wogóle istnieje?

2) czy istnieje tylko jedna, czy więcej? [1]),

3) jak tę figurę (względnie te figury) narysować?

Wprawdzie dyskutowanie pytań 1) i 2) leży poza ramami samej konstrukcji, która wkracza dopiero przy szukaniu odpowiedzi na pytanie 3), zajmowanie się jednak wyłącznie odpowiedzią na pytanie 3) byłoby niewłaściwe, a to z tego powodu, że w myśl powszechnie przyjętej umowy przez rozwiązanie zagadnienia konstrukcyjnego rozumiemy danie odpowiedzi na wszystkie trzy pytania. Jak zobaczymy poniżej, dyskusja pytań 1) i 2) w rozmaitych zagadnieniach nastręcza dużo sposobności do nawiązywania z innemi działami matematyki.

Po drugie należy zauważyć, że takie lub inne rozwiązanie zagadnienia konstrukcyjnego może zależeć od tego, jakie przyrządy mamy do dyspozycji przy zadanej konstrukcji. Do powyższych trzech pytań należy tedy dołączyć jeszcze czwarte:

4) czy figura da się skonstruować przy danych środkach?

Jeżeli uczniowie należycie zrozumieją (oczywiście przykładami popartą) istotę tej drugiej uwagi, nauczyciel będzie mógł w klasach późniejszych bez większych obaw zaryzykować przy okazji wyjaśnienie zagadnienia kwadratury koła.

Prostota konstrukcji żądanej figury zależy od dwóch rzeczy: od samej figury i od ilości pomocniczych czynności, prowadzących do nakreślenia tej figury (zależność od rodzaju środków, danych nam do dyspozycji, pomijamy, przyjmując, że chodzi o konstrukcje wykonalne zapomocą lineału i cyrkla). Jeśli jedynie samą figurę mamy na względzie, to podzielić można konstrukcje na takie, gdzie szukana figura składa się z jednego punktu, wzgl. skończonej ilości punktów, lub składa się z pewnych linij. Wśród ostatnich najprostsze będą te, gdzie szukana figura jest linją prostą lub kołem, albowiem redukuje się w tym przypadku do wyznaczenia w zasadzie dwóch punktów. Będzie rzeczą b. pouczającą, jeżeli nauczyciel dobierze taki szereg konstrukcyj, na którym wskaże uczniom, jak każda następna z szeregu konstrukcyj sprowadza się do poprzedniej. Oczywiście poszukiwana figura może być prosta, a konstrukcja będzie zawiła ze względu na czynności pośrednie, prowadzące ostatecznie do szukanej figury. Nie można też wysuwać postulatu stopniowania trudności przy podawaniu konstrukcyj, albowiem może być konstrukcja b. prosta, ale wymagająca pewnych daleko posuniętych wiadomości z planimetrji, i z tego powodu musi być przesunięta na później.

Proponowałbym, ażeby nauczyciel początkowo, stawiając zagadnienie konstrukcyjne, wprost przystępował do wskazania konstrukcji, a uzasadniał ją *a posteriori*. W miarę, jak uczniowie

[1]) Pragniemy zwrócić uwagę na to, że odpowiedź co do ilości może być niejednoznaczna. Weźmy następujący prosty przykład: Dane na płaszczyźnie dwa punkty A, B, odległe od siebie o 2 cm. Chodzi o znalezienie figury o tej własności, że każdy punkt figury jest od obu punktów A, B odległy o 3 cm. Odpowiedź będzie jednoznaczna. Jeżeli jednak zmienimy warunki zadania i powiemy: szukamy punktu odległego od obu punktów A, B o 3 cm, to odpowiedź nie będzie już jedna. Będą bowiem dwa punkty (dwie figury) o żądanej własności.

poznają coraz większy zasób twierdzeń planimetrji, można przy zadaniach konstrukcyjnych zajmować się pytaniem 2), wzgl. 1). Nie można poczytać tego za wadę, że odpowiedź na pytanie 1) dajemy dopiero po znalezieniu konstrukcji. Wszak i w klasycznej metodzie, jaką jest „analiza starożytnych" (o czem jeszcze parę słów poniżej) nieinaczej postępujemy. Należy zaznaczyć, że dawanie zadań konstrukcyjnych, przy których odpowiedź na pytanie 1) wypada negatywna, posiada też swoją wartość, gdyż mamy sposobność wyćwiczyć uczniów w dowodzeniu niewprost.

Skoro uczniowie poznali już szereg konstrukcyj, możemy w dalszych zadaniach starać się wydobyć od uczniów samą konstrukcję w ten sposób, że każemy im przypomnieć sobie te poznane twierdzenia z planimetrji, w których we wniosku jest właśnie mowa o warunkach narzuconych w naszej konstrukcji. W ten sposób uzyskają uczniowie żywy *przegląd* całego szeregu twierdzeń poznanych w planimetrji. Więcej nawet niż przegląd, który przyczynia się do utrwalenia teorji. Poznają mianowicie *zastosowania* twierdzeń, co napewno więcej im przypada do przekonania, aniżeli piękno „samo w sobie" twierdzeń. Uważam, że niema wiele przesady w powiedzeniu E n r i q u e s a, jednego z największych geometrów, że graficzne rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych jest jednym z *celów* nauczania geometrji w szkole średniej.

Jest rzeczą całkiem naturalną, że zadania konstrukcyjne wyzyskują w całej pełni wiadomości z geometrji elementarnej. Istnieje jednak inna dziedzina matematyki, do której można przy konstrukcjach geometrycznych nawiązać w sposób prosty, a której to dziedziny niewiele się dotyka w szkole średniej. Dziedziną tą jest teorja liczb. Jak wiadomo, teorja liczb zajmuje się własnościami liczb *całkowitych* i stanowi przykład jednej z najbardziej abstrakcyjnych teoryj matematycznych. Z tego też względu całkiem słusznie nie weszła w zakres nauczania gimnazjalnego. Poza podaniem definicji liczb pierwszych oraz paru kryterjów podzielności, niczego się właściwie uczniowie w szkole nie dowiadują z teorji liczb. Sposobność do zakomunikowania uczniom kilku wiadomości z tego działu matematyki nadarza się właśnie przy konstrukcji odcinków o długości $\sqrt{n}$ (n jest liczbą naturalną), mając dany odcinek jednostkowy. Wprawdzie

regularna metoda zaleca tutaj stosowanie konstrukcji średniej geometrycznej, to jednak uczniom narzuci się najnaturalniej pomysł wykorzystania twierdzenia Pitagorasa. Jest więc tu miejsce, ażeby omówić kwestję przedstawialności liczb całych jako sumy, względnie jako różnicy kwadratów dwu liczb całkowitych. Choćbyśmy się nie kusili o dowodzenie odnośnych twierdzeń z teorji liczb, to jednak warto je—mem zdaniem—uczniom zakomunikować. Nawiązanie do teorji liczb spotykamy też przy omawianiu konstrukcji podziału kąta pełnego na n równych części. Kwestja ta łączy się—jak wiadomo—w sposób bardzo głęboki i pouczający z teorją równań algebraicznych i teorją grup, co już oczywiście musi pozostać nieodkrytą tajemnicą dla uczniów szkoły średniej, ale pomimo to możnaby bez uzasadnienia podać do wiadomości uczniów, kiedy da się zapomocą lineału i cyrkla skonstruować umiarowy wielobok, a kiedy nie. Przynajmniej warto wspomnieć o rezultacie, przekazanym nam jeszcze przez epokę starożytną, o możliwości podziału w przypadku, gdy

$$n = 2^k,\ 3,\ 5,\ 2^k.3,\ 2^k.5,\ 3.5,\ 2^k.3.5 \quad \Big\}\ k \text{ dowolna liczba naturalna.}$$

Jak pożyteczną refleksję u niejednego ucznia musi obudzić wspomnienie o G a u s s i e, który, jako dziewiętnastoletni chłopak, rozwiązał ciężki problem podziału okręgu koła na 17 równych części!

Przy omawianiu wykonalności konstrukcyj zapomocą lineału i cyrkla nadarza się najlepsza sposobność do omówienia klasycznych wysiłków, datujących się jeszcze od czasów starożytnych, znanych pod nazwami: podwojenia sześcianu, kwadratury koła i trójpodziału kąta. Niema oczywiście mowy, by móc na poziomie gimnazjum uzasadnić niewykonalność wspomnianych konstrukcyj, możnaby jednak wspomnieć, na czem zasadniczo dowód polega. Dla uniknięcia nieporozumienia należy jednak zwrócić baczną uwagę na pewną subtelność logiczną, która tkwi w sformułowaniu zasady trójpodziału kąta. Niemożliwość trójpodziału zapomocą lineału i cyrkla stosuje się tylko do przypadku ogólnego, t. j. dowolnego kąta. W całym szeregu szczególnych kątów można trójpodział uskutecznić. Uświadomienie uczniów na punkcie zagadnień kwadratury koła i trójpodziału kąta powinien nauczyciel uważać za punkt honoru, choćby dlatego, że nierzadko mamy sposobność do prostowania panującej

jeszcze tu i owdzie wśród laików opinji, że kwadratura koła jest problemem dotąd nierozwiązanym.

Przechodzimy do innej kwestji, która w związku z konstrukcjami geometrycznemi winna być (w wyższych klasach) poruszona w szerszych ramach, aniżeli to dotąd ma miejsce. Chodzi nam mianowicie o teorję przybliżeń. Z teorją przybliżeń uczeń, opuszczając szkołę średnią, winien być obeznany w sposób należyty. Wyciąganie pierwiastków, ułamki dziesiętne nieskończone, logarytmy, teorja granic dają wiele sposobności do zaznajomienia się z tym działem. Znowu nadarza się sposobność powiązania teorji przybliżeń z teorją konstrukcyj *przybliżonych*. Na samym początku należałoby wyraźnie podkreślić różnicę między konstrukcjami *dokładnemi* a *przybliżonemi*. Przez konstrukcję przybliżoną rozumiemy takie następstwo czynności rysunkowych, które prowadzą ostatecznie *nie* do figury żądanej, ale innej, w mniejszym lub większym stopniu różnej od niej. Różnicę między figurą żądaną a otrzymaną można ująć ilościowo i ocenić w ten sposób t. zw. stopień przybliżenia. Nie należy jednak pomieszać pojęć konstrukcji dokładnej i przybliżonej z kwestją praktycznego *wykonywania* konstrukcyj, gdzie, będąc zmuszeni do posługiwania się przyrządami nieidealnemi, zawsze zadowalamy się tylko przybliżonem wykonaniem konstrukcji. Trzeba zatem zaznaczyć dobitnie, że w *praktyce* każda konstrukcja musi być przybliżona, bo jest obarczona pewnemi błędami, płynącemi z niedokładności przyrządów i naszego wzroku (niemożliwość narysowania punktów). Jednakowoż stopień przybliżenia przy wykonywaniu konstrukcji dokładnej może być zawsze poprawiony przez zwiększenie wymiarów rysunku i zaostrzenie przyrządów rysunkowych, podczas gdy dla konstrukcyj przybliżonych istnieje pewna górna granica, której przekroczyć nie można. Na temat przybliżoności konstrukcyj dokładnych istnieje cała teoryjka, która za Lemoine'm [2]) nazywa się *geometrografją*. Stanowi ona próbę klasyfikacji konstrukcyj geometrycznych według ich prostoty oraz według dokładności. Znaleźli się nawet badacze w osobach Ch. Wienera i K. Nitza, którzy zadali sobie trud, ażeby obliczyć średni błąd, jaki popełniamy, umieszczając ostrze cyrkla w danym punkcie, względnie kreśląc przez zadany punkt linję prostą zapomocą linealu. W pierwszym przypadku obliczono średni błąd na 0,012 mm, w drugim przypadku na 0,05 mm.

[2]) Lemoine. *La géométrographie*. Paris, 1902.

Przy omawianiu dokładności konstrukcyj geometrycznych należałoby rozwiązać z uczniami następujące dwa podstawowe zadania, a mianowicie: 1) przez dwa dość bliskie punkty poprowadzić linję prostą z możliwie dobrą dokładnością, oraz 2) wyznaczyć z możliwie dobrą dokładnością punkt przecięcia się dwóch prostych, nachylonych do siebie pod nieznacznym kątem. Powyższe konstrukcje zasługują na wzmiankę dlatego, że przy ich rozwiązywaniu korzystamy z twierdzenia Desargues'a.

Przybliżonemi konstrukcjami zmuszeni jesteśmy z konieczności tam się posługiwać, gdzie środki dane nam do dyspozycji nie pozwalają nam na konstrukcję dokładną, względnie, gdzie wykonanie konstrukcji dokładnej wymaga zbyt długiego czasu.

Co się tyczy konstrukcyj przybliżonych, wartoby podać uczniom jedną z prostszych konstrukcyj kwadratury koła (np. konstrukcję naszego rodaka Kochańskiego, wymagającą jednej tylko rozwartości cyrkla), następnie przybliżoną konstrukcję liczby $\sqrt[3]{2}$, otrzymaną z przybliżenia $\frac{349}{277}$, łatwą do wykonania, jeżeli się uwzględni następującą równość:

$$\frac{349}{277} = \frac{2^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2}{1^2 + \left(1 + \frac{5}{9}\right)^2}$$

Przy wszelkich konstrukcjach przybliżonych należy konsekwentnie przestrzegać obliczenia *górnego krańca błędu*. Uczniom musi być wpojone zrozumienie tego faktu, że przybliżenie nie posiada żadnej wartości, jak długo nie znamy górnego krańca błędu przybliżenia.

Pouczającem również będzie przeprowadzenie z uczniami pogawędki na temat, jaki stopień przybliżenia konstrukcji jest praktycznie wystarczający.

Przy omawianiu konstrukcyj przybliżonych posiada nauczyciel najlepszą sposobność, ażeby zwrócić uwagę na to, iż matematyka, najściślejsza z nauk, zawdzięcza sporo odkryć *przypadkowi*. Odkrycie nowego twierdzenia względnie jego dowodu, jak-

kolwiek nieraz następuje po mozolnych i długich usiłowaniach, może być dziełem przypadku, dziełem szczęśliwej ręki. Historja może wskazać liczny szereg odkryć na temat konstrukcyj przybliżonych, które są wynikiem nie systematycznej i celowej pracy, ale dziełem szczęśliwego przypadku. Typowym przykładem tego jest niedawno, bo trzy lata temu, wymyślona konstrukcja trójpodziału kąta przez zwykłego krawca niemieckiego, niejakiego Kopfa. Jest ona tak prosta i tak dokładna zarazem, że bezwarunkowo zasługuje na podanie do ogólnej wiadomości. Perron wręcz twierdzi, że konstrukcja ta, jeśli chodzi o jej wypadkową wartość pod względem prostoty i dokładności, stoi na pierwszem miejscu wśród mnóstwa innych dotąd znanych. Konstrukcja Kopfa (dla kątów ostrych) przedstawia się następująco: Rysujemy najpierw pomocniczą figurę, składającą się z półkola, wspartego na dowolnie obranej średnicy. Środek koła oznaczamy literą O, punkty końcowe średnicy przez A, B. Rysujemy dalej punkt C na okręgu półkola tak, żeby odcinek CO był prostopadły do średnicy AB, i punkt D na przedłużeniu średnicy AB poza A tak, żeby $CD = AB$. Mając teraz dany kąt x (który mamy podzielić na trzy równe części), umieszczamy go w pomocniczej figurze tak, żeby jego jedno ramię zlało się z promieniem OB, zaś drugie ramię przecięło półkole w punkcie X. Oznaczmy przez Y punkt przecięcia się odcinka AX z łukiem koła o środku A i promieniu AC. Kąt y, jaki tworzy promień DY z promieniem DO, jest właśnie szukanem przybliżeniem trzeciej części kąta x. Konstrukcja podana jest oczywiście tylko przybliżona. Niemniej błąd maksymalny (osiągnięty mniej więcej dla kąta $x = 52^0$) wynosi niecałe $8\frac{1}{2}$ minut, leży więc poniżej granicy dokładności, wymaganej dla jakichkolwiek celów praktycznych.

Ze sprawą oceniania stopnia przybliżenia, które musi być — jak zaznaczyłem — konsekwentnie przeprowadzone przy konstrukcjach przybliżonych, wiąże się inna sprawa, bardzo ważna ze względu na teorję nierówności. Zamiast na gruncie abstrakcyjnym, można tutaj przy sposobności wyćwiczyć uczniów i zaprawić ich do prostych przeróbek nierówności. Za jedną z głównych przyczyn, dla których pojęcie granicy jest tak trudne do zrozumienia dla uczniów i wymaga tak dużego nakładu czasu,

poczytuję na podstawie poczynionych obserwacyj brak dostatecznej wprawy i obeznania się z twierdzeniami o nierównościach.

Na zakończenie pragnę podkreślić to, że przy zadaniach konstrukcyjnych, o ile jesteśmy w stadjum poszukiwania konstrukcji (a nie uzasadniania konstrukcji znalezionej czy podanej), stosujemy metodę rozumowania — bardzo ważną też w teorji równań — zwaną *analizą starożytnych*. Zakładamy mianowicie, że istnieje figura, spełniająca postawione warunki, i z tego założenia staramy się wysnuć pewne związki tej figury w stosunku do elementów zgóry danych. Bardzo często się zdarza, że otrzymane w ten sposób warunki konieczne są prostego kształtu i okazują się zarazem warunkami wystarczającemi i jako takie dają nam już wprost konstrukcję (i istnienie zarazem) figury.

Są też zadania konstrukcyjne tego typu, że przy pytaniu 1), czy istnieje figura o żądanych własnościach, zmuszeni jesteśmy przeprowadzić całą drobiazgową dyskusję odnośnie do wzajemnych stosunków danych elementów i rozbić rozumowanie na szereg przypadków. Zależnie od przypadku rozwiązanie będzie istniało lub nie. Tego rodzaju dyskusje są mojem zdaniem bardziej kształcące ze względu na rozmaitość interpretacji geometrycznej, aniżeli dyskusja równań stopnia drugiego z parametrami, która—jak wykazał prof. Zaremba[3]—może być sschematyzowana i całkowicie zmechanizowana.

Muszę też wspomnieć o wypadkach, w których chcemy dać odpowiedź wyłącznie na pytanie 1) odnośnie do egzystencji samej figury, to znaczy zadawalniamy się tylko stwierdzeniem czy figura o żądanych własnościach istnieje, a nie chodzi nam o jej nakreślenie. Weźmy jeden z najprostszych przykładów. Zbadajmy, kiedy możliwe jest skonstruowanie trójkąta o danych zgóry: jednym boku a, kącie α naprzeciw tego boku leżącym, i wysokości w_a należącej do boku a. Jeżeli się ograniczymy tylko do tego pytania 1), to łatwa konstrukcja da nam natychmiast odpowiedź w postaci warunków koniecznych i wystarczających na to, aby zadanie było możliwe. Kreślimy mianowicie odcinek a i budujemy trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości w_a. Kąt wierzchołkowy tego trójkąta oznaczamy przez α_0.

[3]) S. Zaremba. *Wstęp do analizy*, skrypt litografowany. Nakł. Kółka Mat.-Fiz. U. U. J. Kraków, 1908.

Prowadzimy teraz przez wierzchołek A_0 tego trójkąta prostą p, równoległą do a i zwracamy uwagę na fakt następujący. Przy zmienym trójkącie o podstawie a i wierzchołku A, poruszającym się po prostej p, kąt α przy wierzchołku A maleje w miarę, gdy A posuwa się na lewo lub na prawo od pozycji początkowej A_0. Ponadto kąt ten maleje do zera w sposób ciągły, gdy A oddala się od A_0 nieograniczenie po prostej p. Stwierdzamy tedy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym rozwiązalności zadania (czyli istnienia figury) jest to, ażeby $\alpha \leqq \alpha_0$.

Stosując podobne postępowanie, jak w podanym przykładzie, możemy uzyskać odpowiedź w wielu przypadkach, w których chodzi nam wyłącznie o istnienie pewnej figury. Może być to nawet i taka figura, której sama konstrukcja (zapomocą lineału i cyrkla) jest bardzo trudna lub wogóle niemożliwa, tak że zgóry rezygnujemy z jej znalezienia.

Nie od rzeczy będzie, jeżeli podkreślimy jeszcze, że w rozdziale o konstrukcjach geometrycznych posiadamy co krok sposobność do wzmianek z *historji matematyki.* Ma to znaczenie tem większe, że dzisiejsze lekcje historji zazwyczaj w za małej mierze uwzględniają historję nauki z wielką szkodą dla t. zw. ogólnego wykształcenia. Nie należy więc przy omawianiu różnych klasycznych konstrukcyj geometrycznych zaniedbać tej sposobności i wspomnieć o niejednem nazwisku, które godzi się zapamiętać, i zwłaszcza o wielkim przyczynku, jaki w tej dziedzinie pozostawili nam w spuściźnie starożytni Grecy.

Kończąc powyższe, dość ogólnikowe uwagi, pragnę dodać jeszcze, że mnogość różnych ciekawych zadań konstrukcyjnych, jak i łatwość stawiania sobie samemu problemów na ten temat, jest ważkim argumentem natury dydaktycznej, który przemawia za szerszem uwzględnieniem tego tematu w nauczaniu szkolnem.

JAN LEŚNIAK (Kraków).

O OKRESACH ZASADNICZYCH FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

W ciągu nauki matematyki w szkole średniej poznają uczniowie kilka funkcyj jednej zmiennej, n. p. funkcję linjową, kwadratową, wykładniczą, logarytmiczną, funkcje trygonometryczne i ich zasadnicze własności. Przy odkrywaniu przez uczniów własności rozważanych funkcyj okazują się bardzo pożytecznemi ich wykresy (obrazy). Należy podnieść z naciskiem, iż wykres funkcji może nam tylko nasunąć pewne przypuszczenia, że funkcja posiada te własności, które spostrzegliśmy na jej wykresie, jednakże wykres nie może stanowić dowodu, czy też zwolnić nas od obowiązku podania uzasadnienia, iż funkcja w rzeczywistości posiada owe własności. Kreślenie bowiem obrazów funkcji jednej zmiennej może odbywać się różnie, zależnie od przyjętego układu spółrzędnych, przyjętej skali i t. d. [1]). Zatem obrazy jednej i tej samej funkcji mogą być różne.

Jeżeli chodzi o własności funkcyj trygonometrycznych, to wykresy szkolne tych funkcyj uwidaczniają cały szereg ich własności, jak n. p. okresowość, wartość okresu zasadniczego i t. d. W niniejszym artykule zajmiemy się twierdzeniami, dotyczącemi okresów zasadniczych funkcyj trygonometrycznych.

Celem uzyskania większej jasności rozumowania i uniknięcia ewentualnych nieporozumień, przypominamy definicje funkcyj

[1]) Zobacz: *Zbiór zadań z wyższej matematyki* A. Hoborskiego, St. Gołąba i A. Jakubowskiego. 1926. Zeszyt I. § 2.

trygonometrycznych i te ich własności, na których będziemy się opierali w naszych rozważaniach.

Definicja: *Funkcję f jednej zmiennej (rzeczywistej) nazywamy okresową, jeżeli istnieje liczba k, różną od zera i taka, że*

1° przy dowolnem x liczby x i x + k równocześnie do pola (obszaru określoności) funkcji f należą lub też nie należą;

2° dla każdego x należącego do pola funkcji f mamy:

$$f(x + k) = f(x).$$

Definicja: *Okresem funkcji f jednej zmiennej nazywamy każdą różną od zera liczbę k, która spełnia warunki 1° i 2°.*

Można udowodnić (co pomijamy), że, jeżeli funkcja f jednej zmiennej posiada jeden okres, to posiada ich nieskończenie wiele. Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich okresów funkcji f. Może się zdarzyć (ale nie musi), iż wśród dodatnich liczb zbioru Z istnieje liczba najmniejsza. Jeżeli to zachodzi, wtedy mówimy, że funkcja f posiada okres zasadniczy.

Definicja: *Okresem zasadniczym funkcji okresowej f nazywamy jej najmniejszy okres dodatni, o ile taki istnieje* [2].

Słuszne jest twierdzenie, iż każdy okres funkcji jednej zmiennej (rzeczywistej), posiadającej okres zasadniczy, jest wielokrotnością okresu zasadniczego [3]. Dowodu tego twierdzenia, jako zbyt ogólnego dla szkoły średniej, nie podajemy; natomiast przeprowadzimy go dla funkcyj trygonometrycznych.

Przechodzimy obecnie do podania definicyj funkcyj trygonometrycznych [4]) zakładając, że sprawa mierzenia kątów skierowanych jest już uprzednio załatwiona.

Definicja: *Funkcją sinus nazywamy przepis (sposób postępowania) następujący:*

[2]) Rozważmy funkcję f określoną w sposób następujący: dla każdej liczby niewymiernej wartość funkcji f równa się jeden, dla każdej zaś liczby wymiernej równa się zero. Łatwo się przekonać, że każda liczba wymierna jest okresem funkcji f. Funkcja ta w myśl przyjętej definicji nie posiada okresu zasadniczego.

[3]) Twierdzenie to unaocznia celowość wprowadzenia pojęcia okresu zasadniczego.

[4]) Stoimy na stanowisku, że funkcją jednej zmiennej jest przepis (sposób postępowania), który każdej liczbie z pewnego zbioru, zwanego polem funkcji, przyporządkowuje jedną, ściśle określoną liczbę.

mając daną, przy ustalonej jednostce, miarę kąta α, którą oznaczymy literą $\bar{\alpha}$

1) kreślimy na płaszczyźnie skierowanej [5]) *układ spółrzędnych prostokątnych Kartezjusza i wybieramy odcinek jednostkowy;*

2) kreślimy koło środkowe o promieniu równym jednostce;

3) umieszczamy kąt α na naszej płaszczyźnie w ten sposób, żeby wierzchołek kąta α znajdował się w środku koła, a pierwsze ramię leżało na dodatniej części osi x-ów;

4) oznaczając punkt przecięcia się drugiego ramienia kąta α z kołem środkowem literą M, obliczamy rzędną punktu M, którą przypisujemy liczbie $\bar{\alpha}$.

Bezpośrednio widoczną jest rzeczą, że podany sposób postępowania, który nazywamy sinusem, można zastosować do miary dowolnego kąta, a zatem pole funkcji sinus składa się ze wszystkich liczb [6]).

Jeżeli w powyżej podanej definicji funkcji sinus zastąpimy rzędną przez odciętą, to otrzymamy definicję funkcji cosinus.

Zauważmy, że pole funkcji cosinus składa się również ze wszystkich liczb.

Definicja: *Funkcją tangens nazywamy przepis następujący: mając daną miarę $\bar{\alpha}$ kąta α,*

1) kreślimy na płaszczyźnie skierowanej prostokątny układ spółrzędnych Kartezjusza i wybieramy odcinek jednostkowy;

2) kreślimy koło środkowe o promieniu równym jednostce;

3) umieszczamy kąt α na naszej płaszczyźnie w ten sposób, żeby wierzchołek kąta α znajdował się w środku koła, a pierwsze ramię leżało na dodatniej części osi x-ów;

[5]) To znaczy na płaszczyźnie, której jedną ze stron oznaczono jako dodatnią, drugą zaś jako ujemną.

[6]) Zwróćmy uwagę, że pole i zapas (zbiór wartości) funkcji sinus składają się z liczb niemianowanych (czystych). Utarł się zwyczaj, iż liczby z pola funkcyj trygonometrycznych przy przyjęciu jednostki stopniowej piszemy z kółkiem, np. 90°, co ma *jedynie* oznaczać, że jednostką miary, którą posługiwaliśmy się, był jeden stopień. Zamiast np. 90° możemy pisać 90, pamiętając o tem, iż kąty mierzymy w stopniach. Kierując się jednak tradycją będziemy przy *szczegółowych* miarach kąta pisali kółka u góry, tem bardziej, że w myśl powszechnej umowy opuszczanie kółek wskazuje na przyjęcie miary radjanowej dla kątów.

4) *kreślimy w punkcie przecięcia się A koła środkowego z dodatnią częścią osi x-ów styczną do koła;*

5) *oznaczając punkt przecięcia się (o ile taki istnieje) prostej, na której leży drugie ramię kąta α z narysowaną styczną literą M, obliczamy rzędną punktu M, którą przyporządkowujemy liczbie $\overline{\alpha}$.*

Zanim przystąpimy do wyznaczenia pola funkcji tangens, przytoczymy dwa twierdzenia dotyczące kątów.

Twierdzenie 1. Kąt w tem znaczeniu, którem posługujemy się w trygonometrji, jest wyznaczony jednoznacznie, jeżeli znamy:

I. położenie ramienia pierwszego,

II. położenie ramienia drugiego,

III. kierunek obrotu ramienia ruchomego,

IV. liczbę całkowitą, która wskazuje, ile razy promień ruchomy przeszedł przez położenie ramienia drugiego, zanim się w tem położeniu zatrzymał (wychodząc z ramienia 1-go jako pozycji początkowej).

Twierdzenie 2. Jeżeli są spełnione tylko warunki I, II i III, to kąt nie jest wyznaczony jednoznacznie. O ile jednak znamy miarę $\overline{\alpha}$ jednego z kątów spełniających warunki I, II i III, to zbiór wszystkich miar takich kątów jest wyrażony wzorem:

$$\overline{\alpha} + n \,.\, 360^\circ,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną lub zerem) [7].

Wracając do badania pola funkcji tangens spostrzegamy, że wymieniona w definicji funkcji tangens czynność 5) nie będzie wykonalna dla wszystkich miar kątów. Zdarzy się to wyłącznie wtedy, gdy drugie ramię kąta będzie leżało na dodatniej lub ujemniej części osi y-ów. Posługując się twierdzeniem 2, zauważamy, że grupa miar tych wszystkich kątów, których drugie ramię leży na dodatniej części y-ów, wyraża się wzorem:

$$90^\circ + n \,.\, 360^\circ, \quad \text{czyli} \quad 90^\circ + 2\,n \,.\, 180^\circ,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą; druga zaś grupa miar tych wszystkich kątów, których drugie ramię leży na ujemnej części osi y-ów, wyraża się wzorem:

---

[7]) Zobacz: *Wstęp do analizy* Prof. Dr. S. Zaremby, skrypt wydany przez Kółko Matem.-fizyczne U. U. J. Kraków, 1908. Rozdział X.

$$270^\circ + n \,.\, 360^\circ, \quad \text{czyli} \quad 90^\circ + (2\,n + 1) \,.\, 180^\circ,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Łącząc obie rozważane grupy miar otrzymujemy zbiór, który jest objęty wzorem:

$$90^\circ + n \,.\, 180^\circ, \quad \text{czyli} \quad (2\,n + 1) \,.\, 90^\circ,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Wobec tego pole funkcji tangens składa się ze wszystkich liczb z wyłączeniem wszelkich nieparzystych wielokrotności liczby 90°.

Definicja funkcji cotangens różni się od definicji funkcji tangens czynnościami 4) i 5), które dla cotangensa brzmią:

4) *kreślimy w punkcie przecięcia się B koła środkowego z dodatnią częścią osi y-ów styczną do koła;*

5) *oznaczając punkt przecięcia się (o ile taki istnieje) prostej, na której znajduje się drugie ramię kąta α, z narysowaną styczną literą N, obliczamy odciętą punktu N, którą przyporządkowujemy liczbie $\overline{\alpha}$.*

Jeżeli uwzględnimy twierdzenie 2, otrzymamy, że pole funkcji cotangens składa się ze wszystkich liczb z wyłączeniem wielokrotności liczby 180°.

Definicje pozostałych funkcyj trygonometrycznych, to jest funkcji secans i cosecans, pomijamy.

Bezpośrednio po podaniu definicyj funkcyj trygonometrycznych możemy przystąpić do nakreślenia wykresów tychże funkcyj. Rzut oka na te wykresy wystarcza, by nabrać przekonania, iż wszystkie funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowemi.

Obecnie przystąpimy do uzasadnienia słuszności naszego przypuszczenia, dotyczącego funkcji sinus. Mamy zatem podać taką liczbę k różną od zera, dla której zachodzą następujące własności:

1°. Przy dowolnem x liczby x i $x + k$ równocześnie do pola funkcji sinus należą lub nie należą;

2°. $\sin (x + k) = \sin x$ dla każdego x, należącego do pola funkcji sinus.

Twierdzimy, iż za k można przyjąć liczbę 360°. Istotnie. Warunek 1° jest spełniony, gdyż pole funkcji sinus składa się ze wszystkich liczb. Warunek 2° jest także spełniony, a to dlatego, że kąty o miarach x i $x + 360^\circ$, umieszczone w umówiony w definicji sposób na układzie spółrzędnych Kartezjusza, mają zlewające się pierwsze i drugie ramiona, a zatem punkty przecięcia się

drugich ramion obu kątów z kołem również się nakrywają. Wnosimy stąd, iż wartości funkcji sinus dla x i $x + 360^0$ są sobie równe. Z przedstawionego rozumowania wynika, że funkcja sinus jest funkcją okresową, i jednym z jej okresów jest liczba 360^0. W zupełnie podobny sposób można się przekonać, że dowolna wielokrotność liczby 360^0 z wyjątkiem zera jest okresem funkcji sinus. Przeprowadzając dla pozostałych funkcyj trygonometrycznych analogiczne rozumowania, stwierdzamy: każda funkcja trygonometryczna jest okresową, i jednym z okresów dla każdej z nich jest liczba 360^0.

Wykresy rozważanych funkcyj nasuwają nam także myśl, że okresem zasadniczym dla funkcyj sinus i cosinus jest liczba 360^0, dla funkcyj zaś tangens i cotangens liczba 180^0. Postaramy się obecnie udowodnić słuszność naszego przypuszczenia.

Twierdzenie I. Okresem zasadniczym funkcji sinus jest liczba 360^0.

Dowód. Stwierdziliśmy poprzednio, że liczba 360^0 jest okresem funkcji sinus; obecnie okażemy, iż liczba 360^0 jest z pośród dodatnich okresów sinusa liczbą najmniejszą. Przypuśćmy na chwilę istnienie liczby p, która jest okresem funkcji sinus i spełnia nierówności:

$$0^0 < p < 360^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Z hipotezy naszej wynika, że

$$\sin(x + p) = \sin x \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

dla każdego x należącego do pola sinusa.

Ale liczba 90^0 należy do pola rozważanej funkcji, zatem mamy:

$$\sin(90^0 + p) = \sin 90^0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Bezpośrednio z definicji sinusa otrzymujemy:

$$\sin 90^0 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Z równości (3) i (4) dostajemy:

$$\sin(90^0 + p) = 1 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Wyznaczmy ogół miar wszystkich takich kątów, dla których wartość funkcji sinus równa się liczbie 1. Wierzchołek każdego

z tych kątów znajduje się w początku układu spółrzędnych, ramię pierwsze na dodatniej części osi x-ów, ramię zaś drugie musi przecinać koło w punkcie, którego rzędna ma wartość jeden. Jedynym takim punktem jest punkt przecięcia się koła z dodatnią częścią osi y-ów, a zatem drugie ramię musi leżeć na dodatniej części osi y-ów. Według przytoczonego twierdzenia 2, kąt przez podane warunki nie jest wyznaczony jednoznacznie, ale wystarczy znać miarę jednego kąta, czyniącego zadość podanym warunkom, a potrafimy podać ogół wszystkich miar kątów, z których każdy spełnia wyszczególnione żądania. W naszym przypadku liczba 90^0 jest miarą jednego z kątów, spełniających podane warunki; wobec tego ogół wszystkich miar wyraża się wzorem:

$$90^0 + n \,.\, 360^0,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Wzorem tym musi być objęta liczba $90^0 + p$, ponieważ

$$\sin(90^0 + p) = 1.$$

Istnieje przeto liczba całkowita $\bar{n}$ taka, że

$$90^0 + p = 90^0 + \bar{n} \,.\, 360^0.$$

Stąd $\qquad p = \bar{n} \,.\, 360^0.$

Wobec tego uwzględniając zdanie (1) mamy:

$$0^0 < \bar{n} \,.\, 360^0 < 360^0,$$

czyli $\qquad 0 < \bar{n} < 1, \quad \ldots\ldots \quad (6)$

co jest niemożliwe, bo niema liczby całkowitej spełniającej nierówności (6). Przypuszczenie nasze zatem upada; funkcja sinus nie posiada okresu dodatniego mniejszego od 360^0, czyli liczba 360^0 jest okresem zasadniczym funkcji sinus.

Wróćmy jeszcze na chwilę do podanego dowodu. W związku (2), który miał zachodzić dla każdego x, należącego do pola funkcji sinus, podstawiliśmy w miejsce x liczbę 90^0 i otrzymaliśmy sprzeczność. Powstaje pytanie, czy powyższa metoda dowodu utrzymałaby się, gdybyśmy podstawili w miejsce x w związku (2) inną wartość, np. 0^0.

W tym przypadku otrzymujemy:

$$\sin(0^0 + p) = \sin 0^0.$$

Ale $\sin 0^0 = 0$ i $0^0 + p = p$,

więc $\sin p = 0$.

Ogół miar wszystkich takich kątów, dla których wartość sinusa równa się zero, wyraża się wzorem:

$$n \cdot 180^0,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Wobec tego:

$$p = \overline{n} \cdot 180^0,$$

przyczem $\overline{n}$ oznacza pewną liczbę całkowitą.

Ponieważ $0^0 < p < 360^0$,

mamy $0^0 < \overline{n} \cdot 180^0 < 360^0$,

a dalej $0 < \overline{n} < 2$

i tej sprzeczności, jaką otrzymaliśmy poprzednio, niema, ponieważ istnieje liczba całkowita, a mianowicie 1, spełniająca ostatnie nierówności.

Nasuwa się zatem pytanie, przy jakiem podstawieniu za x w związku (2) nasza metoda dowodu prowadzi do celu. Odpowiedź, którą nasuwa nam znowu obserwacja wykresu funkcji sinus, opiewa: wartości na x, o które nam chodzi, wyrażają się wzorem:

$$90^0 + n \cdot 180^0,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Podana odpowiedź powinna być potwierdzona rozumowaniem, czem jednak nie będziemy się zajmowali w ramach niniejszego artykułu.

Rozważmy jeszcze zbiór okresów funkcji sinus. Stwierdziliśmy poprzednio, że dowolna wielokrotność liczby 360^0 z wyjątkiem zera należy do tego zbioru. Okażemy, że ogół wszystkich wielokrotności okresu zasadniczego po odrzuceniu zera wyczerpuje zbiór wszystkich okresów funkcji sinus. W tym celu weźmy

dowolny okres naszej funkcji i oznaczmy go literą t. Istnieje jedna jedyna liczba całkowita s taka, że

$$s \leqslant \frac{t}{360^0} < s + 1.$$

Stąd

$$s \cdot 360^0 \leqslant t < (s+1) \cdot 360^0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

zatem

$$t = s \cdot 360^0 + w, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

gdzie w jest pewną liczbą spełniającą nierówności:

$$0^0 \leqslant w < 360^0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Z założenia mamy:

$$\sin(x + t) = \sin x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

dla każdej wartości na x należącej do pola sinusa.

Podstawiając w związku (4) za t liczbę $s \cdot 360^0 + w$ otrzymujemy:

$$\sin[x + (s \cdot 360^0 + w)] = \sin x,$$

czyli

$$\sin[(x + w) + s \cdot 360^0] = \sin x \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

dla każdego x z pola funkcji sinus.

Zauważmy, że $s \neq 0$; gdyby bowiem $s = 0$, wtedy nierówność (1) przybrałaby postać:

$$0^0 \leqslant t < 360^0,$$

co jest niemożliwe, ponieważ t, jako okres, jest liczbą różną od zera, a funkcja sinus, jak stwierdziliśmy, nie posiada okresu dodatniego mniejszego od liczby 360^0. Wobec tego $s \cdot 360^0$ jest okresem funkcji sinus. Mamy zatem:

$$\sin[(x + w) + s \cdot 360^0] = \sin(x + w) \quad . \ . \ . \quad (6)$$

dla każdego x z pola funkcji sinus.

Ze związków (5) i (6) otrzymujemy:

$$\sin(x + w) = \sin x$$

dla każdej wartości x wziętej z pola sinusa.

Twierdzimy, że w musi równać się zero. Gdyby bowiem $w \neq 0^0$, to wtedy w musiałoby być okresem funkcji sinus (spełnione są oba warunki, o których mowa w definicji okresu), co ze względu na nierówność (3) i twierdzenie o okresie zasadniczym funkcji sinus jest niemożliwe. A zatem $w = 0^0$ i równość (2) przybiera postać:

$$t = s \cdot 360^0;$$

a ponieważ poprzednio mieliśmy, że $s \neq 0$, więc t jest wielokrotnością okresu zasadniczego różną od zera.

Twierdzenie II. Okresem zasadniczym funkcji cosinus jest liczba 360^0.

Dowód zupełnie podobny do dowodu, jaki przeprowadziliśmy dla funkcji sinus. Różnica leży w tem, że w związku:

$$\cos(x + p) = \cos x,$$

który ma zachodzić dla każdego x z pola funkcji cosinus, podstawiamy w miejsce x właśnie liczbę 0^0, a nie jak przy rozważaniu funkcji sinus liczbę 90^0. Pozatem rozumowanie analogiczne.

Okazać również można, iż ogół wszystkich wielokrotności okresu zasadniczego po odrzuceniu zera wyczerpuje zbiór wszystkich okresów funkcji cosinus. Dowód, analogiczny do dowodu przeprowadzonego dla funkcji sinus, pomijamy.

Twierdzenie III. Okresem zasadniczym funkcji tangens jest liczba 180^0.

Dowód. Aby okazać, że liczba 180^0 jest okresem zasadniczym tangensu, musimy udowodnić, iż:

a) liczba 180^0 jest okresem funkcji tangens;

b) liczba 180^0 jest najmniejszą liczbą z pośród dodatnich okresów tangensa.

Weźmy dowolny kąt α i jego miarę oznaczmy przez $\overline{\alpha}$. Zauważmy, że drugie ramiona kątów, umieszczonych w umówiony w definicji sposób na układzie spółrzędnych Kartezjusza i posiadających jako miary liczby $\overline{\alpha}$ i $\overline{\alpha} + 180^0$, leżą na jednej i tej samej prostej. Wobec tego, uwzględniając definicję funkcji tangens, stwierdzamy:

1) liczby $\overline{\alpha}$ i $\overline{\alpha} + 180^0$ do pola tangensa równocześnie należą lub też nie należą;

2) wartości funkcji tangens dla $\overline{\alpha}$ i $\overline{\alpha} + 180^0$ są sobie równe.

Temsamem udowodniliśmy, iż liczba 180^0 jest okresem funkcji tangens.

W zupełnie podobny sposób możemy się przekonać, że dowolna wielokrotność liczby 180^0 z wyjątkiem zera jest okresem funkcji tangens.

Celem uzasadnienia prawdziwości zdania b) przypuśćmy, że istnieje dodatni okres mniejszy od 180^0, który oznaczmy przez p. Mamy:

$$\operatorname{tg}(x + p) = \operatorname{tg} x$$

dla każdego x należącego do pola tangensu.

Ponieważ liczba 0^0 należy do pola funkcji tangens, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}(0^0 + p) = \operatorname{tg} 0^0.$$

Ale $0^0 + p = p$ i $\operatorname{tg} 0^0 = 0$, stąd:

$$\operatorname{tg} p = 0.$$

Wyznaczmy ogół miar wszystkich takich kątów, dla których tangens równa się zero. Wartość funkcji tangens równa się zero (co wynika z definicji) dla miar tych wszystkich kątów i tylko tych, których wierzchołki leżą w początku układu spółrzędnych, ramiona pierwsze na dodatniej części osi x-ów, a drugie ramiona na prostej leżącej na osi x-ów. Wobec tego drugie ramiona rozważanych kątów zajmują jedno z dwóch możliwych położeń, a mianowicie:

A) ramię drugie leży na dodatniej części osi x-ów,

B) ramię drugie leży na ujemnej części osi x-ów.

W przypadku A) jeden z kątów czyniących zadość wyszczególnionym warunkom ma miarę równą 0^0, a zatem według twierdzenia 2. ogół miar wszystkich takich kątów wyraża się wzorem:

$$0^0 + n \cdot 360^0,$$

czyli wzorem:

$$2\,n \cdot 180^0,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

W przypadku B) jeden z kątów spełniających podane warunki ma miarę równą 180^0, więc ogół miar wszystkich takich kątów jest wyznaczony wzorem:

$$180^0 + n \cdot 360^0,$$

czyli wzorem:

$$(2\,n + 1) \cdot 180^0,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Łącząc oba zbiory miar rozważanych kątów otrzymujemy zbiór, złożony ze wszystkich wielokrotności liczby 180°.

Skoro tg $p = 0$, istnieje liczba całkowita $\bar{n}$ taka, że

$$p = \bar{n} \, . \, 180^\circ.$$

Z hipotezy mamy:

$$0^\circ < p < 180^\circ,$$

czyli

$$< 0^\circ \, \bar{n} \, . \, 180^\circ < 180^\circ,$$

stąd

$$0 < \bar{n} < 1 \text{ i sprzeczność.}$$

Wobec tego nasze przypuszczenie, iż istnieje okres funkcji tangens dodatni i mniejszy od liczby 180°, odpada, a zatem nasze twierdzenie jest udowodnione.

Twierdzenie IV. Okresem zasadniczym funkcji cotangens jest liczba 180°.

Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia III-go.

Rozważając zbiór okresów funkcji tangens, względnie cotangens, możemy udowodnić twierdzenie:

Ogół wszystkich wielokrotności okresu zasadniczego funkcji tangens, względnie cotangens, po odrzuceniu zera, wyczerpuje zbiór wszystkich okresów funkcji tangens, względnie cotangens.

Rozumowanie jest zupełnie podobne do rozumowania przedstawionego odnośnie do zbioru wszystkich okresów funkcji sinus.

W końcu zaznaczamy, że stosując podane metody rozumowania, możemy udowodnić, iż pozostałe funkcje trygonometryczne, t. j. secans i cosecans, są również funkcjami okresowemi; okresem zasadniczym dla obu funkcyj jest liczba 360°, a zbiór wszystkich okresów funkcyj secans i cosecans jest złożony z wszelkich wielokrotności liczby 360° z wyjątkiem liczby zero.

ANDRZEJ TUROWICZ (Kraków).

MIERZENIE ODCINKÓW I PÓL WIELOBOKÓW.

1. Zagadnienie mierzenia [1]) polega na przyporządkowaniu każdemu elementowi pewnej klasy wielkości, określonej liczby. Rozpatrzymy więc, 1° kiedy zbiór jakichś elementów możemy uważać za klasę wielkości, 2° jakie warunki spełniać winno przyporządkowanie liczb elementom zbioru, 3° w jaki sposób w szkole nadajemy zbiorowi odcinków, ew. zbiorowi wieloboków, charakter wielkości, 4° jak przypisujemy im miary, czyli jak je mierzymy.

2. Klasą wielkości nazywamy *zbiór elementów, jeśli wprowadzono relacje „równości" i „większości" tak, że jakiekolwiek dwa elementy zbioru, A i B, obierzemy, zachodzić będzie jeden i tylko jeden ze związków: A jest „równe" B, A jest „większe" od B, B jest „większe" od A.* Zamiast ostatniego zwrotu używamy także wyrażenia: A jest „mniejsze" od B. Relacje „równości" i „większości" mogą być wprowadzone aksjomatycznie, albo też definjowane. „Równość" musi posiadać własności: samozwrotności, odwracalności i przechodniości, „większość" natomiast własności: nieodwracalności i przechodniości. Własności tych jako powszechnie znanych formułować nie będziemy. „Równość" wcale nie oznacza identyczności, odmiennie niż to ma miejsce np. dla liczb całkowitych. Niekiedy termin „równość" zastępuje się słowem „równoważność"; będziemy mieli na to przykład w dalszych rozważaniach.

Dla wyjaśnienia potrzeby wprowadzenia równości czy równoważności, musimy uprzedzić dalsze rozważania. Wiemy, że

[1]) Będziemy mówili tylko o mierzeniu odcinków nieskierowanych, wobec czego miary będą dodatnie. Podobnie w przypadku wieloboków.

ANDRZEJ TUROWICZ (Kraków).

MIERZENIE ODCINKÓW I PÓL WIELOBOKÓW.

1. Zagadnienie mierzenia [1]) polega na przyporządkowaniu każdemu elementowi pewnej klasy wielkości, określonej liczby. Rozpatrzymy więc, 1⁰ kiedy zbiór jakichś elementów możemy uważać za klasę wielkości, 2⁰ jakie warunki spełniać winno przyporządkowanie liczb elementom zbioru, 3⁰ w jaki sposób w szkole nadajemy zbiorowi odcinków, ew. zbiorowi wieloboków, charakter wielkości, 4⁰ jak przypisujemy im miary, czyli jak je mierzymy.

2. Klasą wielkości nazywamy *zbiór elementów, jeśli wprowadzono relacje „równości“ i „większości“ tak, że jakiekolwiek dwa elementy zbioru, A i B, obierzemy, zachodzić będzie jeden i tylko jeden ze związków: A jest „równe“ B, A jest „większe“ od B, B jest „większe“ od A.* Zamiast ostatniego zwrotu używamy także wyrażenia: *A* jest „mniejsze“ od *B*. Relacje „równości“ i „większości“ mogą być wprowadzone aksjomatycznie, albo też definjowane. „Równość“ musi posiadać własności: samozwrotności, odwracalności i przechodniości, „większość“ natomiast własności: nieodwracalności i przechodniości. Własności tych jako powszechnie znanych formułować nie będziemy. „Równość“ wcale nie oznacza identyczności, odmiennie niż to ma miejsce np. dla liczb całkowitych. Niekiedy termin „równość“ zastępuje się słowem „równoważność“; będziemy mieli na to przykład w dalszych rozważaniach.

Dla wyjaśnienia potrzeby wprowadzenia równości czy równoważności, musimy uprzedzić dalsze rozważania. Wiemy, że

---

[1]) Będziemy mówili tylko o mierzeniu odcinków nieskierowanych, wobec czego miary będą dodatnie. Podobnie w przypadku wieloboków.

można tak dobrać prostokąt i trójkąt, aby miały równe miary powierzchniowe. Te więc różne figury są z punktu widzenia teorji miary „jednakowe". Otóż równoważność jest w ten sposób określona dla wieloboków, że dwie różne figury, jak np. prostokąt i trójkąt mogą być równoważne. Nie możemy jednak określać figur równoważnych, jako figury mające jednakowe miary powierzchniowe, (jak to czyni Hadamard w swym podręczniku geometrji elementarnej), gdyż według obecnie obowiązujących programów gimnazjalnych, teorja równoważności poprzedza teorję mierzenia. Zatem pojęcie równoważności, czy równości, musi być wprowadzone niezależnie od pojęcia miary, w tym jednak celu, aby w przyszłości umożliwić przypisywanie różnym wielkościom tej samej miary, zgodnie z praktycznemi potrzebami.

Dla określenia relacji „większości" przyjmiemy następujący sposób postępowania: określimy dodawanie w zbiorze elementów, inaczej mówiąc określimy, który z elementów zbioru uważamy za równy sumie $A + B$ dwóch dowolnych elementów A i B. Następnie przyjmiemy definicję: A jest „większe" od B, jeśli A jest równe sumie $B + C$, gdzie C oznacza dowolny element zbioru. Oczywiście definicja sumy musi być tak skonstruowana, aby relacja „większości" określona przy jej pomocy miała wszystkie własności wymienione w definicji klasy wielkości.

Ostatecznie zatem dla nadania zbiorowi charakteru klasy wielkości będziemy postępowali w ten sposób: wprowadzimy pojęcie „równości", określimy działanie dodawania, a pojęcie „większości" zdefinjujemy przy pomocy pojęcia sumy.

3. Przyporządkowanie wielkościom liczb, czyli ich miar, winno spełniać następujące warunki:

a) miary są liczbami dodatniemi;

b) wielkościom równym (równoważnym) przypisujemy miary równe;

c) sumie $A + B$ dwóch wielkości A i B przypisujemy jako miarę sumę miar wielkości A i wielkości B;

d) pewnemu elementowi klasy wielkości przypisujemy liczbę 1.

Element ten nazywamy jednostką miary. Warunki te stanowią postulaty teorji miary. Co do tych postulatów należy poczynić następujące uwagi: wykluczyliśmy możliwość miary równej

zeru. W teorji mierzenia odcinków, czy figur płaskich wielobocznych, można pominąć miary zerowe bez szkody dla teorji; uwzględnianie miar zerowych komplikuje wypowiedź niektórych twierdzeń, a tego w praktyce szkolnej należy unikać.

Układ postulatów jest tak pomyślany, aby wystarczał dla teorji mierzenia odcinków, lub wieloboków. Nie jest on wystarczający np. dla teorji mierzenia mnogości punktowych, lecz te zagadnienia wykraczają poza zakres szkoły średniej.

Wobec przyjętej definicji „większości" i warunków a) oraz c) jest odrazu widocznem, że wielkość „większa" będzie miała większą miarę.

4. Rozważmy jeszcze pytanie, czy nie możnaby zbudować teorji miary bez przygotowań opisanych w ustępie 2. Odpowiedź jest twierdząca. Np. w teorji mierzenia mnogości punktowych podanej przez Lebesgue'a nadajemy mnogościom punktowym charakter wielkości dopiero przez określenie miary. Można również zbudować szkolną teorję mierzenia pól wieloboków bez uprzedniej teorji równoważności. Rozważania ustępów 2 i 3 miały na celu uwydatnienie logicznej struktury metody, przewidzianej przez obecnie obowiązujący program szkoły średniej.

5. *Odcinki.* Określiwszy odcinki wprowadzamy w szkole „równość odcinków" jako pojęcie pierwotne (nie definjowane) i podajemy zwykłe postulaty odnoszące się do tego pojęcia. Następnie definjujemy sumę. Najczęściej używaną jest następująca metoda: określa się odcinki „kolejne", sumę odcinków kolejnych, potem sumę dowolnych odcinków. Ten sposób postępowania stosują w swych podręcznikach Łomnicki [2]), Wojtowicz [3]) i Zydler [4]). Takie określenie sumy odcinków etapami jest teoretycznie bez zarzutu. Zdaje się jednak, że można pojęcie „odcinków kolejnych" opuścić, a to z następującego powodu: „kolejność" jest potrzebna tylko do definicji sumy, później już nie. Skoro definicja sumy może być poprawnie i łatwo sformułowana bez „kolejności", niewarto obciążać pamięci uczniów definicją „odcinków kolejnych". Sumę odcinków możemy określić jak następuje: *sumą dwóch odcinków a i b nazywamy trzeci odcinek c, jeśli można w nim obrać punkt dzielący go na dwa od-*

²) A. Łomnicki: Geometrja elementarna. Wyd. VI.

³) W. Wojtowicz: Zarys geometrji elementarnej. Wyd. V.

⁴) J. Zydler: Geometrja w zakresie szkoły średniej. Wyd. XIX.

cinki, z których jeden równy jest odcinkowi a, drugi odcinkowi b. Następnie przyjmujemy definicję: *Odcinek a nazywamy większym od odcinka b, jeśli jest sumą odcinka b i pewnego odcinka c.* Należy w klasie podkreślić, że suma odcinków jest określona wieloznacznie, t. j. że dwa odcinki posiadają dowolnie wiele sum (równych). Łatwo udowodnić twierdzenie, że z dwóch odcinków nierównych jeden jest większy. W „Geometrji" Zydlera pojęcie odcinka większego i mniejszego poprzedza wprowadzenie sumy odcinków (por. Zydler, str. 9). Za tem stanowiskiem przemawia większa jego poglądowość. Określając jednak większość przez sumę (por. Łomnicki, str. 16 i Wojtowicz, str. 12), mamy sposobność w łatwych przypadkach zapoznać młodzież z techniką ścisłego przeprowadzania dowodów, rozwijając teorję nierówności między odcinkami. Oprócz pojęć wymienionych wprowadzamy pojęcie iloczynu odcinka przez liczbę całą, co nie nastręcza żadnych trudności.

6. Przystępując do zagadnienia mierzenia odcinków, zastanówmy się, czy należy na początku wprowadzić jakąś ogólną definicję miary. Enriques i Amaldi w swych „Zasadach geometrji elementarnej" (tł. Wojtowicza) podają taką definicję (str. 238): miarą jest stosunek odcinka mierzonego do jednostki miary. Tej definicji jednak przyjąć nie możemy. Wymaga ona poprzedniego przerobienia nauki o stosunkach odcinków, i to klasyczną metodą Euklidesa. Ani miarowa, ani czysto geometryczna nauka o proporcjach oczywiście takiej podbudowy pod teorję mierzenia dać nie mogą. Określenie: „miara jest to liczba podająca ile razy jednostka miary mieści się w odcinku mierzonym", jest błędne, gdyż zawodzi dla wszelkich odcinków, których miary nie są całkowite. Wobec tego dla uniknięcia trudności należy zrezygnować z ogólnej definicji miary i określać miarę osobno w przypadku, gdy jednostka miary mieści się w odcinku mierzonym bez reszty, osobno gdy jest z nim spółmierna, osobno wreszcie, gdy jest z odcinkiem mierzonym niespółmierna.

Rozpoczynamy od definicji spółmierności odcinków. O ile czas na to pozwala, pożądanem jest przerobienie dla pogłębienia nauki o odcinkach spółmiernych i niespółmiernych algorytmu Euklidesa dla znalezienia największej wspólnej miary [5]). Dowód

[5]) Por. Enriques Amaldi. *Zasady geometrji elementarnej* (tł. Wojtowicza), str. 220—225.

istnienia odcinków niespółmiernych można znaleść u Łomnickiego (str. 207), Wojtowicza (str. 207) i Zydlera (str. 169—170). Wskazaniem dydaktycznem jest, aby pomocnicze twierdzenie arytmetyczne, na które się w dowodach wymienionych powołujemy, było udowodnione (lub przynajmniej sformułowane) przed przystąpieniem do dowodu istnienia odcinków niespółmiernych.

Po omówieniu spółmierności i niespółmierności formułujemy następujące zagadnienie dla uczniów: mamy każdemu odcinkowi przyporządkować pewną liczbę. Będziemy przytem trzymali się następujących zasad: liczby należące do odcinków będą dodatnie; odcinki równe otrzymają równe liczby; odcinek będący sumą dwóch innych odcinków otrzyma jako swoją liczbę sumę liczb należących do dodajników; wreszcie od nas zależeć będzie wybór odcinka, któremu przypisujemy liczbę 1 i tego wyboru dokonamy.

Należy zauważyć, że tak sformułowane zagadnienie nadaje się doskonale do samodzielnej pracy poszukiwawczej uczniów pod kierunkiem nauczyciela, jeśli idzie o odcinki spółmierne. Uczniowie rozwiązują zadanie etapami, (które im trzeba wyznaczyć); naprzód wyznaczają liczby dla wielokrotności obranej jednostki miary, potem dla jej podwielokrotności, wreszcie dla dowolnego odcinka z jednostką miary spółmiernego. Zadanie ich będzie jeszcze łatwiejsze, jeśli na wstępie udowodnimy, opierając się na wyszczególnionych regułach, twierdzenie, że odcinek będący iloczynem odcinka a przez liczbę naturalną n, otrzymuje miarę n razy większą niż odcinek a.

W ten sposób zagadnienie mierzenia odcinków spółmiernych z jednostką jest rozwiązane.

7. Zagadnienie mierzenia odcinków niespółmiernych z jednostką jest nierozwiązalne, jeśli nie skorzystamy z jednego z t. zw. postulatów ciągłości. Przytoczymy tutaj trzy z nich.

Postulat Dedekinda. Jeżeli punkty odcinka podzielimy na dwie klasy, tak, aby 1⁰ każdy punkt należał do jednej i tylko jednej z nich, 2⁰ końce odcinka należały do różnych klas, 3⁰ każdy punkt klasy pierwszej poprzedzał dowolny punkt klasy drugiej przy pewnym zwrocie na prostej, to wtedy istnieje punkt i to jeden o tej własności, że każdy (różny od niego) punkt klasy pierwszej poprzedza go, a każdy punkt klasy drugiej (różny od niego) następuje po nim przy wspomnianym wyżej zwrocie.

Postulat Archimedesa. Jeśli a i b są dowolnemi odcinkami, to istnieje liczba cała nieujemna n, taka że $n \cdot a \leq b < (n+1) \cdot a$.

Postulat Cantora Jeśli dwie klasy odcinków mają następujące własności 1°, każdy odcinek klasy pierwszej jest mniejszy od dowolnego odcinka klasy drugiej, 2° gdy obierzemy dowolnie odcinek a, znajdzie się taki odcinek w klasie pierwszej i taki w klasie drugiej, by ich różnica była mniejsza od owego odcinka, to wtedy istnieje jeden i tylko jeden odcinek większy od wszystkich (różnych od niego) odcinków klasy pierwszej, a mniejszy od wszystkich (różnych od niego) odcinków klasy drugiej.

Stosunki logiczne między temi postulatami są następujące: opierając się na postulacie Dedekinda można udowodnić zarówno postulat Archimedesa, jak i Cantora. Natomiast, aby udowodnić postulat Dedekinda należy założyć oba postulaty Archimedesa i Cantora [6]. Wobec tego w teorji mierzenia trzeba wprowadzić albo postulat Dedekinda, albo oba postulaty Archimedesa i Cantora. Nadto do wyznaczenia miary odcinka niespółmiernego z jednostką wystarcza postulat Archimedesa. Postulat Cantora jest potrzebny dopiero przy dowodzie twierdzenia, że dla każdej liczby niewymiernej istnieje odcinek, którego ona jest miarą przy obranej jednostce.

Oprzemy się zatem w dalszych rozważaniach na postulatach Archimedesa i Cantora.

8. Wyznaczenie miary odcinka niespółmiernego z jednostką miary wymaga metody przystosowanej do przerobionej w szkole teorji liczb niewymiernych. Jeśli liczba niewymierna została określona przez przekrój zbioru liczb wymiernych, wyznaczenie miary odcinka niespółmiernego z jednostką musi opierać się na pojęciu przekroju. Sposób postępowania w tym przypadku przedstawiony jest w podręcznikach: Zydlera (str. 207—212), Wojtowicza (str. 258—262) i najszczegółowiej u Łomnickiego (str. 241 — 242). Zauważymy tylko, że u Łomnickiego dowód twierdzenia, że dolna klasa przekroju nie zawiera liczby największej, oparty jest na milczącem założeniu postulatu Archimedesa.

Podamy tutaj inny sposób postępowania, oparty na innej definicji liczb niewymiernych. Liczbę niewymierną można określić jako ułamek dziesiętny nieskończony i nieokresowy; na tej de-

[6]) Por. Enriques. *Zagadnienia dotyczące geometrji elementarnej* Tom I. Art. V.

finicji można oprzeć teorję liczb niewymiernych [7]). Niech j oznacza odcinek wybrany na jednostkę miary, a odcinek z nim niespółmierny, m niech będzie dowolną liczbą naturalną. Wtedy na podstawie postulatu Archimedesa znajdziemy liczbę całą nieujemną k_m, taką że:

$$k_m \cdot \frac{1}{10^m} \cdot j \leqq a < (k_m + 1) \cdot \frac{1}{10^m} \cdot j \,.$$

Wobec niespółmierności j oraz a można równość odrzucić i pozostanie: $k_m \cdot \frac{1}{10^m} \cdot j < a < (k_m + 1) \cdot \frac{1}{10^m} \cdot j$

Z postawionego w zagadnieniu miary żądania, by suma odcinków miała jako miarę, sumę miar wynika twierdzenie, że odcinek większy ma miarę większą. Zatem z ostatniej nierówności między odcinkami wynika, że miara odcinka a musi być zawarta między liczbami $\frac{k_m}{10^m}$ i $\frac{k_m + 1}{10^m}$ i to dla dowolnego m naturalnego. Ale jedyną taką liczbą jest nieskończony ułamek dziesiętny, którego reduktami są liczby $\frac{k_m}{10^m}$.

Pozostaje do udowodnienia, że ten ułamek dziesiętny jest liczbą niewymierną. Rozumujemy niewprost: Gdyby był równy liczbie wymiernej, to moglibyśmy zbudować odcinek b współmierny z jednostką o mierze równej tej liczbie. Odcinek ten jest różny od a, które jest z jednostką niespółmierne. Przypuśćmy, że b jest mniejsze od a; wtedy dla dość dużego m, $\frac{k_m}{10^m} \cdot j$ musi być większe od b, co daje sprzeczność. Podobnie obala się przypuszczenie, że b jest większe od a.

Zaznaczyć należy z całym naciskiem, że naszkicowany sposób postępowania, winien w szkole być przeprowadzony tylko na szczególnych przykładach. Można np. przyjąć jako jednostkę bok kwadratu, jako odcinek mierzony jego przekątnię, na m należy przyjmować pokolei 1, 2, 3 i t. d.. Wtedy rozumowania, które przy ogólnej notacji są dość abstrakcyjne, staną się znacznie zrozumialsze. Wprawdzie przerobienie kilku przykładów,

[7]) Por. S. Steckel. *O teorji liczb niewymiernych w szkole średniej*. Parametr. I. Zeszyt 9—10

choćby nawet poparte zapewnieniem, że w innych przykładach postępuje się w ten sam sposób, nie zastępuje rozumowania ogólnego, lecz wobec trudności zagadnienia miary odcinków niespółmiernych z jednostką w szkole średniej, należy zdaje się z ogólnego rozumowania zrezygnować. Zauważmy, że i wymienione podręczniki ograniczają się do przykładu miary przekątni kwadratu, gdy jednostką jest jego bok, i do uwagi, że w innych przypadkach postępuje się analogicznie.

Ze względu na potrzebę graficznego przedstawienia liczb musimy zkolei podać dowód twierdzenia, że każdej liczbie niewymiernej odpowiada odcinek, którego ona jest miarą.

W tym celu należy podać uczniom naprzód postulat Cantora. Następnie, gdy liczba jest dana przez jakikolwiek ułamek dziesiętny nieskończony i nieokresowy, tworzymy dwie klasy odcinków o miarach wymiernych: do pierwszej z nich należą odcinki, których miary są reduktami naszego nieskończonego ułamka, do drugiej odcinki, których miary otrzymujemy powiększając ostatnią cyfrę reduktu o jednostkę. Łatwo okazać, że klasy te spełniają warunki postulatu Cantora. Wobec tego z postulatu wynika istnienie żądanego odcinka.

Na zakończenie teorji mierzenia odcinków należy podać twierdzenie, że jeśli zmienimy jednostkę miary, to miary wszystkich odcinków ulegną pomnożeniu przez miarę starej jednostki względem nowej. Dowód tego twierdzenia w przypadku gdy odcinek mierzony i obydwie jednostki są odcinkami spółmiernemi znajdzie czytelnik u Łomnickiego (str. 244). W pozostałych przypadkach najlepiej przyjąć twierdzenie za prawdziwe bez dowodu.

9. *Wieloboki.* Dla nadania wielobokom charakteru wielkości wprowadzamy przedewszystkiem pojęcie równoważności. Zauważmy odrazu, że mówiąc o wielobokach mamy na myśli figury płaskie, ograniczone linją łamaną zamkniętą, przyczem jedynemi wspólnemi punktami boków są wierzchołki, a z jednego wierzchołka wychodzą tylko dwa boki. Tem samem wykluczamy wieloboki o konturze przecinającym się, natomiast będziemy dopuszczali w rozważaniach wieloboki wklęsłe. Jest to koniecznem ze względu na kwestję dodawania wieloboków. Dwa wieloboki nazywamy równoważnymi, *jeśli przy pomocy skończonej ilości odcinków, możemy podzielić je oba na jednakową ilość części i wprowadzić między częściami jednego i drugiego wieloboku odpowiedniość doskonałą (jednojednoznaczną), tak żeby należące do siebie części były przystające.*

Jest to t. zw. równoważność „przez rozkład". Zwróćmy uwagę, że zwykle używane określenie „części odpowiednio przystające" zostało w definicji zastąpione przez dłuższy zwrot. Powodem tej modyfikacji jest nieścisłość i niejasność pospolicie używanego wyrażenia. Z kolei określamy sumę wieloboków. Podręczniki podają w tym celu naprzód definicję wieloboków „przyległych". Jest to zdaje się zbyteczne z tych samych powodów, dla których obeszliśmy się bez pojęcia odcinków „kolejnych". Definicję sumy postawimy tak: *wielobok A jest sumą wieloboków B i C, jeśli przy pomocy skończonej ilości odcinków można go podzielić na dwa wieloboki, z których jeden przystaje do B, drugi do C.* W związku z tą definicją stwierdźmy dwa fakty: 1° suma wieloboków jest określona wieloznacznie, 2° nie zawsze można dodać do siebie dwa wieloboki. Aby się o tem przekonać, wystarczy rozważyć dwunastobok gwiaździsty umiarowy o boku 1 cm i piętnastobok umiarowy o boku 2 cm. Dwa wieloboki wypukłe można dodać zawsze, lecz suma niekoniecznie będzie już wypukła. Z definicyj równoważności i sumy wieloboków wynika natychmiast twierdzenie, że sumy wieloboków równoważnych są równoważne.

Omówmy kwestję twierdzenia, że dwa wieloboki równoważne temu samemu trzeciemu, są sobie równoważne. Uczniowie są skłonni uważać to twierdzenie za oczywiste, z powodu słuchowego skojarzenia równoważności z równością, czy równoległością. Dla zaostrzenia ich zmysłu krytycznego należy im zwrócić uwagę, że twierdzenie wcale nie jest oczywiste. Wydaje się natomiast, że ogólnego dowodu tego twierdzenia lepiej nie przeprowadzać, gdyż jest bardzo abstrakcyjny. Twierdzenie można przyjąć bez dowodu i najwyżej na przykładzie pokazać, jak w szczególnym jakimś przypadku wykazuje się równoważność.

Przejdźmy do określenia „większości" wieloboków.

Wielobok A nazywamy większym od wieloboku B, jeśli jest sumą wieloboku B_1, równoważnego wielobokowi B i jakiegoś wieloboku C. Stają teraz przed nami dwa pytania: 1) czy po wyborze dowolnych wieloboków A i B, będzie zachodził któryś ze związków: A równoważne B, A większe od B, B większe

od A? 2) czy nie mogą zachodzić dwa z tych związków jednocześnie?

Twierdzącą odpowiedź na pierwsze pytanie można uzyskać po dość okólnych rozumowaniach, opierając się przytem na postulacie Archimedesa. Udowodnienie odpowiedzi przeczącej na pytanie drugie nie wymaga korzystania z postulatów ciągłości, ale jeśli się chce uniknąć skomplikowanych i długich rozważań, przyjmuje się zwykle postulat de Zolta brzmiący: wielobok nie może być równoważny swej części. Najprostszem wyjściem z tych trudności w szkole jest przyjęcie następującego postulatu:

jeżeli A i B są dowolnemi wielobokami, to zachodzi jeden i tylko jeden ze związków: A równoważne B, A większe od B, B większe od A.

Postulat ten, który nazywać będziemy postulatem uporządkowania wieloboków, czyni zbytecznem przyjmowanie postulatu de Zolta i jest od niego, jak się dalej okaże, dogodniejszym w szkole.

Jak wiadomo, chcąc dowieść ogólnie, że równoległoboki o równych podstawach i wysokościach są równoważne, trzeba opierać się na postulacie Archimedesa [8]).

Posługując się postulatem uporządkowania wieloboków, udowodnimy tw. o różnicach wieloboków równoważnych, które pozwoli nam z kolei podać prostszy dowód twierdzenia o równoległobokach bez postulatu Archimedesa.

Różnicą dwóch wieloboków A i B nazywamy wielobok C, taki, że $B + C = A$. Powiadamy teraz, że różnice równoważnych wieloboków są równoważne. Dowód (por. Łomnicki, str. 162) jest łatwy do przeprowadzenia w oparciu o nasz postulat przez reductio ad absurdum. Opierając się na tw. o różnicach otrzymujemy bardzo prosty dowód twierdzenia o równoległobokach mających podstawy i wysokości równe [9]). Jeszcze większe usługi oddaje twierdzenie o różnicach przy dowodzie twierdzenia o gnomonie (por. Łomnicki, str. 162—163 i Zydler, str. 125—126 dowód drugi), którego dowód bez twierdzenia o różnicach jest dość

[8]) Por. Zydler str. 122, Wojtowicz str. 151, Łomnicki str. 157. Wojtowicz i Łomnicki nie cytują postulatu Archimedesa, lecz korzystają z niego.

[9]) Por. Łomnicki str. 162 i Zydler str. 122—123, dowód drugi.

zawiły (por. Zydler, str. 125 dowód pierwszy i Wojtowicz, str. 155—156).

Zydler chcąc sobie zapewnić korzyści, jakie daje twierdzenie o różnicach, wprowadził obok zwykłej definicji równoważności, jeszcze drugą definicję: dwa równoległoboki są równoważne, jeśli są różnicami wieloboków parami przystających. (Jest to t. zw „równoważność przez uzupełnienie"). Ponieważ jednak w szkole średniej nie można przeprowadzić dowodu zgodności obu definicji, zdaje się lepiej jest unikać stosowania metody z dwiema definicjami.

Łomnicki podaje twierdzenie o różnicach dopiero przy końcu teorji równoważności, gdyż opierając się na postulacie de Zolta nie może go udowodnić wcześniej. Postulat o uporządkowaniu wieloboków pozwala to zrobić na wstępie teorji równoważności.

Wojtowicz twierdzeniem o różnicach nie posługuje się.

Przejdźmy do twierdzeń o równoważności między różnemi rodzajami wieloboków. Po wspomnianem twierdzeniu o równoważności równoległoboków dowodzi się, że trójkąt równoważny jest równoległobokowi o tej samej podstawie i dwa razy mniejszej wysokości. Cytowane przez nas podręczniki podają dowód tylko w przypadku, gdy trójkąt i równoległobok mają po jednym kącie przypodstawowym równym. Lukę tę łatwo uzupełnić powołując się na twierdzenie o równoważności równoległoboków. Ta sama uwaga odnosi się do twierdzenia o równoważności trapezu i równoległoboku (ew. trójkąta). Twierdzenia, że równoległoboki równoważne o równych podstawach mają równe wysokości, dowodzi się niewprost z powołaniem na postulat de Zolta. W naszej metodzie trzeba ten postulat zastąpić postulatem o uporządkowaniu wieloboków, co dowodu istotnie nie zmienia.

Jako wskazanie metodyczne przy przerabianiu teorji równoważności należy wysunąć żądanie przerobienia większej ilości zadań konstrukcyjnych z zamianą wieloboków na równoważne. W szczególności w teorji mierzenia pól potrzebna będzie konstrukcja prostokąta o zadanej wysokości równoważnego z prostokątem danym. Drugą wskazówką jest, aby sformułować twierdzenia o równoważności równoległoboków, trójkątów i trapezów z prostokątami, gdyż zagadnienie mierzenia ich pól sprowadzać się będzie do mierzenia pól prostokątów.

10. Przystąpimy do kwestji mierzenia pól wieloboków.

Sformułujemy zagadnienie dla uczniów, podobnie jak przy odcinkach. Wyznaczyć miary pól wieloboków znaczy: 1° przypisać im liczby dodatnie, 2° wieloboki równoważne otrzymają równe liczby, 3° sumie dwóch wieloboków przypiszemy sumę miar dodajników, 4° liczbę 1 przypiszemy kwadratowi, którego bokiem jest jednostka długości.

Naprzód zajmiemy się wyznaczeniem miar pól prostokątów, których wysokość równa jest jednostce długości. Udowodniamy, że miara polowa takiego prostokąta równa jest mierze jego podstawy, po kolei w trzech następujących przypadkach: a) gdy podstawa jest wielokrotnością jednostki długości, b) gdy jest jej podwielokrotną, c) gdy jest z jednostką spółmierna. (Mogą to nawet zrobić łatwo uczniowie sami pod kierunkiem nauczyciela). W przypadku, gdy podstawa prostokąta nie jest spółmierna z jednostką długości, najpraktyczniej będzie przyjąć twierdzenie za prawdziwe bez dowodu.

Następnie dowodzimy twierdzenia, że dowolny prostokąt jest równoważny prostokątowi o wysokości równej jednostce i podstawie, której miara równa jest iloczynowi miar boków prostokąta danego. Dowód tego twierdzenia jest możliwy do przeprowadzenia, gdyż program przewiduje naukę o proporcjonalności odcinków, przed nauką o mierzeniu pól. Prosty dowód otrzymujemy przekształcając zadany prostokąt, w prostokąt o wysokości jednostkowej przy pomocy gnomonu, i rozważając trójkąty podobne, powstałe przy tej konstrukcji.

Z tego twierdzenia wynika bezpośrednio dalsze, że miara pola dowolnego prostokąta jest równa iloczynowi miar jego boków.

Opisana metoda sprowadzenia zagadnienia miary prostokątów do rozważania prostokątów o wysokości jednostkowej posiada tę zaletę, że pozwala ominąć kłopotliwy dość przypadek, w którym oba boki prostokąta są z jednostką niespółmierne. Wojtowicz i Zydler odwołują się wtedy do definicji iloczynu dwóch liczb niewymiernych, która jest dla uczniów dość trudna. Łomnicki stosuje metodę przez nas podaną.

Wyprowadzenie twierdzeń, o miarach pól równoległoboków, trójkątów, trapezów, wieloboków umiarowych, ew. jeszcze

czworoboków o prostopadłych przekątniach, nie przedstawia żadnych trudności metodycznych, skoro mamy przygotowane twierdzenie o ich równoważności z prostokątami.

LITERATURA.

(poza cytowaną w tekście).

D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.*

Pasch-Dehn. *Vorlesungen über die neuere Geometrie.*

Hessenberg. *Die Grundlagen der Geometrie.*

Weber-Wellstein. *Enzyklopädie der Elementarmathematik.*

Killing-Hovestadt. *Handbuch des mathematischen Unterrichts.*

Wskazania, zawarte w Poradniku, odnoszą się do starych programów. Konieczne dopełnienie i zmiany pozostające w związku z nową organizacją szkolną i nowemi programami, ukażą się w dalszych numerach wydawnictw.

SPIS RZECZY.

ZAŁĄCZNIKI:

WAŻNIEJSZE Z BŁĘDÓW DOSTRZEŻONYCH.

Na str.	w wierszu	zamiast	powinno być
15	9*	związek	związki
24	15	geometarji	geometrji
25	2	Kalicum	Kalicun
32	9	wiadomo	wiadome
32	19	pomysły	w pomyśle.
42	22	1930	1930 (pierwsze wydanie 1899)
45	2	t. I—Matematyka i t. III	t. I i t. III Matematyka
51	8*	géométrie. descriptive.	géométrie descriptive.
68	16*	xM, yM	x_M, y_M
72	1*	$\underline{df}$	$\underline{\underline{df}}$
88	3	zmienym	zmiennym
98	1	równać się zero	równać się zeru
100	8	$< 0^0 n . 180^0 < 180^0$	$0^0 < n . 180^0 < 180^0$
108	21	o dcinków	odcinków
114	2	dopełnienie i zmiany	dopełnienia i zmiany.
114	4	wydawnictw	wydawnictwa

Oprócz tego w wierszu 13 *) na str. 32 zamiast „była w posiadaniu" powinno być „posiadała" i t. d.

---

*) Wiersze, których numery oznaczono gwiazdką, są liczone od dołu, pozostałe — od góry.